

Рис. 4

Этих данных достаточно для вычисления траекторий УВ и каверны на плоскости $((R_2, R_k), \tau)$, а также оценки эволюции течения на малом интервале времени, когда начинает сказываться противодействие.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М. : Наука, 1965. 386 с.
2. Коробейников В. П. Задачи точечного взрыва. М. : Наука, 1985. 400 с.
3. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М. : Физматгиз, 1961. 332 с.

УДК 517.984

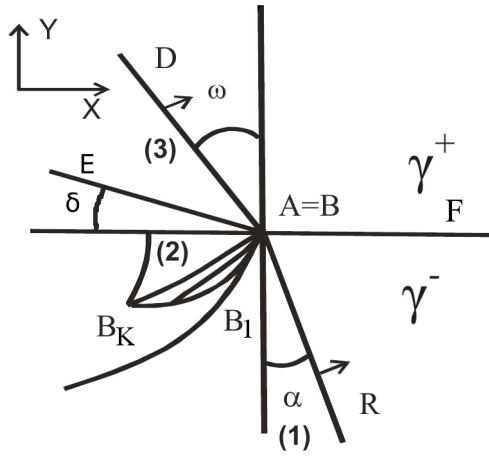
Г. П. Шиндяпин, Р. И. Ливеровский

РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ

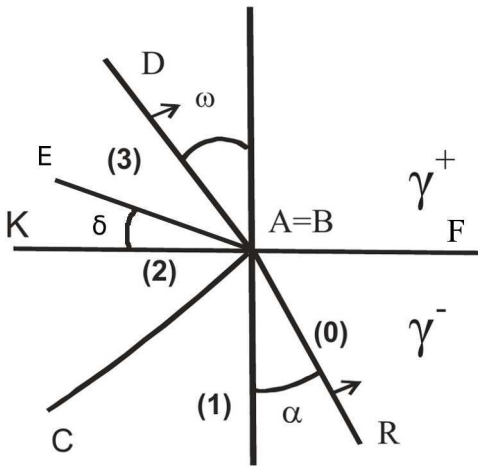
Исследованы процессы нелинейной рефракции ударных волн (УВ) на свободной поверхности, разделяющей газожидкостные среды (ГАЗ/ГАЗ; ГАЗ/ ГЖС; ГЖС/ГЖС), методами асимптотической теории коротких волн [1]. Для режимов с возникновением волны разрежения (RR, RRW) и режимов с возникновением отраженной ударной волны (RW) при падении ударной волны со стороны более плотной среды (режим *fast-slow*) получены аналитические выражения для основных характеристик $(q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0), \omega)$ в пространстве параметров подобия. Результаты развивают [2, 3] и представляют практический интерес для многочисленных приложений [4].

1. При падении УВ (AR) (рис. 1, 2) относительно малой интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0^-$, $B_0^- = \rho_0^- c_0^{-2}$ под углом α к вертикали на свободную поверхность AE, разделяющую различные газожидкостные среды γ^+ , γ^- , возникают различные режимы рефракции: RR (рис. 1),

RW (рис. 2), характеризующиеся фронтами УВ (AR – падающий, AD – преломленный, AC – отраженный), волной разрежения B_1AB_k и изломом свободной поверхности AE . Параметр q^+ характеризует интенсивность волны разрежения или отраженной УВ, $p_3 = p_2$.



RR
Рис. 1



RW
Рис. 2

Анализ задач рефракции УВ при относительно малой интенсивности падающей УВ (AR) ($\bar{\varepsilon} \ll 1$; $\bar{\varepsilon} = P_{10}R_0(\gamma_-) = \varepsilon_{10}L(\gamma_-)$; $\varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$), характерных для ГЖС пузырькового типа, может быть проведен на трех различных уровнях точности: точных соотношений на фронтах УВ и решений для волн разрежения (модель Эйлера); адиабатических потенциальных течений (обобщенная на ГЖС модель Лайтхилла) с точностью P_{10}^2 включительно; асимптотической теории коротких волн (ТКВ) до P_{10} включительно (см. [1-3]).

При асимптотическом анализе задач рефракции относительно слабых УВ с помощью ТКВ в окрестности точки взаимодействия A ($\xi_A, \eta_A = 0$) в автомодельных переменных $\xi = \frac{x}{c_0 t}$, $\eta = \frac{y}{c_0 t}$ вводят разложение

$$\xi = 1 + \bar{\varepsilon}X, \quad \eta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y, \quad \frac{R}{c_0 t} = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \quad \Theta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y, \quad \delta = X + \frac{1}{2}Y^2,$$

$$\frac{u}{c_0} = P_{10} \frac{u^{(1)}}{c_0} + \dots, \quad \frac{v}{c_0} = P_{10}^{3/2} R_0^{1/2} \frac{v^{(1)}}{c_0} + \dots,$$

$$\frac{U}{c_0} = P_{10}\mu + \dots, \quad \frac{V}{c_0} = P_{10}^{3/2} R_0^{1/2} \nu + \dots,$$

$$\frac{p - p_0}{B_0} = P_{10}p^{(1)} + \dots, \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = P_{10}H^{(1)} + \dots, \quad \bar{\varepsilon} = R_0 P_{10} = L\varepsilon_{10}. \quad (1)$$

получим, что течение в области возмущения (за фронтом УВ) описывается системой уравнений коротких волн (см. [1])

$$[\mu(\mu - 2\delta)]_\delta + \nu_Y + 3\mu = 0, \quad \mu_Y = \nu_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)} \quad (2)$$

с условиями на фронтах УВ ($X = X^*(Y)$, μ', ν' – значения перед фронтом)

$$X - \Psi^\nu Y = \frac{1}{2}(\Psi^{\nu^2} + \mu + \mu'), \quad \Psi^\nu = \frac{dX}{dY}, \quad (\mu - \mu')(\Psi^\nu + Y) = \nu' - \nu, \quad P^{(1)} = \mu \quad (3)$$

Решение (2) для волны разрежения B_1AB_k имеет вид

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, \quad \nu = \frac{1}{3}z^3 - \mu Y + d, \quad z = (X - X_A)/Y. \quad (4)$$

2. При использовании модели гомогенной локально-равновесной пузырьковой среды, с газосодержанием $\gamma = m_{II}/m_I$, было установлено в [2], что для процессов рефракции на свободной поверхности $\xi = \xi(\eta)$, разделяющей ГЖС с газосодержаниями γ^+ , γ^- , имеют место в точке A ($\xi_A, \eta_A = 0$) инварианты (I и II)

$$c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad (v^\pm - c_0^\pm \eta_A^\pm)/(u^\pm - c_0^\pm \xi_A^\pm) = 1/\xi',$$

которые для относительно слабых УВ принимают вид

$$c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad v^+ = v^- = c_0^- \xi_A^- \operatorname{tg} \delta. \quad (5)$$

При использовании решения (4) и условий на прямолинейных фронтах УВ (3) для расчета течений в верхней и нижней областях ($q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0)$, $p_3 = p_2$) получим инвариант для случая RR (с волной разрежения)

$$I: \quad \omega^{\nu^2} = 2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1, \quad \omega^\nu = \operatorname{tg} \omega / \bar{\varepsilon}^{1/2}, \quad \alpha^\nu = \operatorname{tg} \alpha / \bar{\varepsilon}^{1/2};$$

$$II: \quad q^{+2} (\bar{\rho} \bar{c})^2 (2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1) = \left[\frac{1}{3} (2X_A - 2q^+)^{3/2} + d \right]^2. \quad (6)$$

В случае RW (с отраженной УВ) в правой части (6) для II (в скобках) имеем выражение: $\nu_2 = \alpha^\nu - (q^+ - 1) \sqrt{\alpha^{\nu^2} - q^+}$. Исключая ω^ν из I , II , получим для RR

$$q^{+2} (\bar{\rho} \bar{c})^2 (2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1) = \left[\frac{1}{3} (2X_A - 2q^+)^{3/2} + d \right]^2, \quad (7)$$

$$X_A = (\alpha^{\nu^2} + 1)/2, \quad d = \alpha^{\nu} - \frac{1}{3}(\alpha^{\nu^2} - 1)^{3/2},$$

для RW

$$q^{+2}(\bar{\rho}\bar{c})^2(2c_{\gamma} + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1) = [\alpha^{\nu} - (q^+ - 1)\sqrt{\alpha^{\nu^2} - q^+}]^2.$$

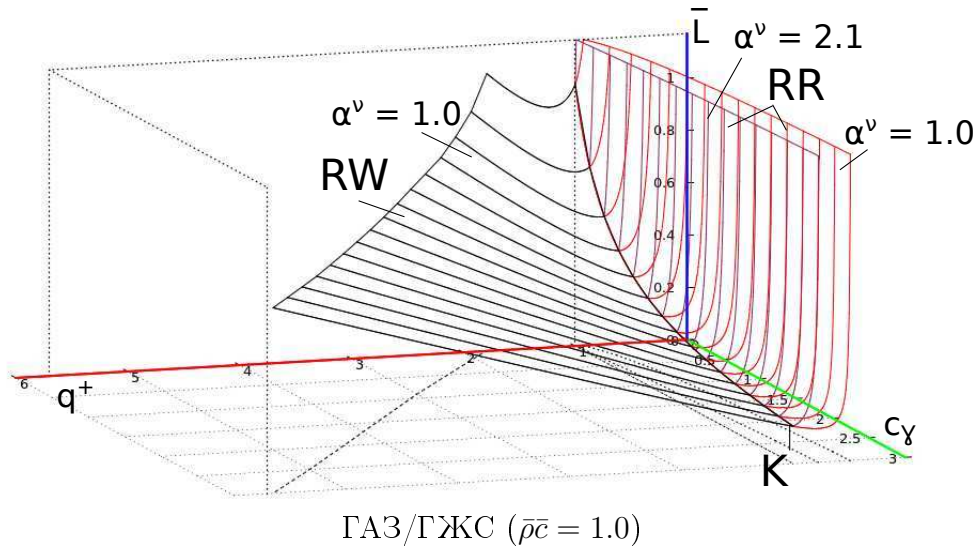
Выражение (7) устанавливает зависимость q^+ от параметров подобия ($\bar{\rho} = \rho^-/\rho^+$, $\bar{c} = c_0^-/c_0^+$)

$$\bar{L} = L^-/L^+, \quad c_{\gamma} = \frac{c_0^- - c_0^+}{c_0^- \bar{\varepsilon}}, \quad \alpha^{\nu}, \quad \bar{\rho}\bar{c}. \quad (8)$$

3. Остановимся на анализе зависимости (7) q^+ от параметров подобия (8). Ранее рассматривалась эта зависимость для случая рефракции на поверхностях, разделяющих ГАЗ/ГАЗ (см. [2]), когда параметр подобия $\bar{\rho}\bar{c} = 1.0$. Отмечалось, что линия раздела K поверхностей RR и RW, где $q^+ = 1.0$, совпадает при различных α^{ν} и дается уравнением

$$2c_{\gamma} = \frac{1}{\bar{L}} - 1. \quad (9)$$

На рис. 3 построены поверхности для q^+/\bar{L} , c_{γ} для режимов RR и RW при $\alpha^{\nu} = 1.0$ (переход к NR) и $\alpha^{\nu} = 2.1$ (переход к RRW). Отмечены минимальные значения q^+ при предельных \bar{L} .



Для случаев рефракции на поверхности, разделяющей ГАЗ/ГЖС (поверхность океана и др.), характерны большие значения параметра

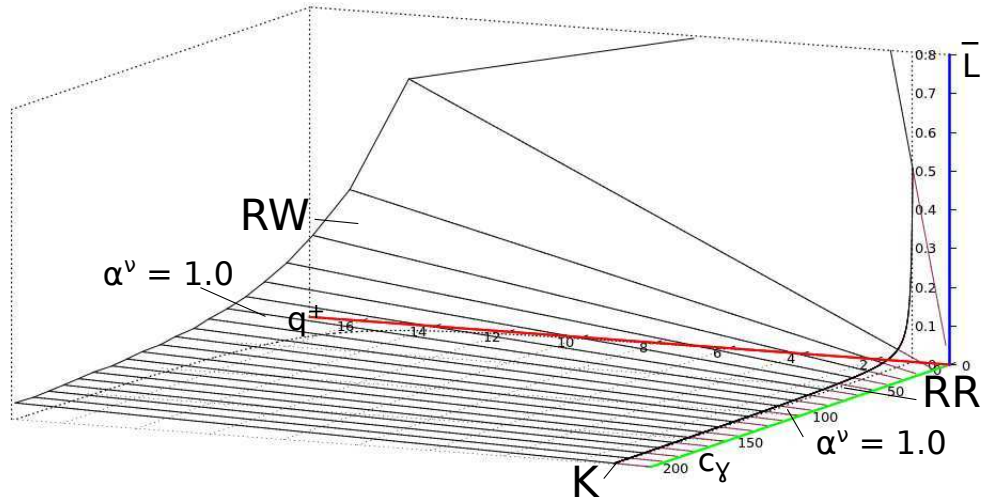
$\bar{\rho}\bar{c}$ ($90 \leq \bar{\rho}\bar{c} \leq 3500$ при $10^{-4} \geq \gamma \geq 0$). В этих условиях правые части (7) для RR и RW могут быть отброшены и решение для q^+ дается выражением

$$q^+ = \bar{L}(2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} + 1). \quad (10)$$

При значительных c_γ ($10 < c_\gamma \leq 1.5 \cdot 10^5$, $10^{-7} > \gamma \geq 0$) линия раздела K ($q^+ = 1.0$) поверхностей RR и RW не зависит от α^ν и дается выражением

$$2c_\gamma \bar{L} = 1, \quad (11)$$

а поверхность $q^+/\bar{L}, c_\gamma$ дается уравнением $q^+ = 2c_\gamma \bar{L}$. На рис. 4 построены поверхности RW и RW $q^+/\bar{L}, c_\gamma$ при $\alpha^\nu = 1.0$ согласно (7). Следует отметить, что предельные значения q^+ на поверхности RW соответствуют предельным значениям \bar{L} . Эти значения q^+ возрастают с увеличением c_γ (пунктирная линия), т.е. с уменьшением γ .



ГАЗ/ГЖС ($\bar{\rho}\bar{c} = 3500$)

Рис. 4

Зависимость решения от α^ν становится существенной при возрастании газосодержания γ (т.е. уменьшении c_γ), когда значения на поверхности и линия K достигают предельных значений \bar{L} (при $\gamma \geq 10^{-6}$). Это обстоятельство может служить причиной исчезновения режима RW при относительно больших (предельных γ^*) газосодержаниях ($\gamma > \gamma^*$).

В то же время режим RR характеризуется малыми значениями \bar{L} и соответственно при больших c_γ малыми значениями q^+ . Это обстоятельство известно в литературе (см. [4]) как вырождение фронта преломленной УВ. Подробные исследования такого случая с помощью более общей модели адиабатических потенциальных течений ГЖС (с точностью до P_{10}^2) проведены авторами в [3]. Показано, что q^+ имеет значения $10^{-5} \leq q^+ \leq 10^{-3}$ при $10^{-8} \leq \gamma \leq 10^{-4}$ в широком диапазоне изменения углов α .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейное взаимодействие ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1997. 104 с.
2. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.
3. Шиндяпин Г. П., Маркушин А. Г. Рефракция ударной волны на свободной поверхности в газожидкостной среде с образованием волны разрежения // Аэродинамика : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1991. Вып. 12(15). С. 24–39.
4. Henderson L. F., Ma J., Sakurai A., Takayama K. Refraction of a shock wave at an air-water interface // Fluid Dynamics Research. 1990. Vol 5. P. 337–350.

УДК 539.3

Д. А. Шишков, Ю. В. Лысункина

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ТОЛСТОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ КОНТУРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе [1] рассмотрена задача вибрационного изгиба толстой прямоугольной пластинки из изотропного материала, два противоположных края которой свободно оперты при произвольном закреплении остальной части боковой поверхности.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) пластинки при статическом изгибе описывается системой уравнений, состоящей из уравнений равновесия сплошной среды и уравнений закона Гука в форме [2]:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*). \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — симметричный тензор напряжений, \mathbf{u} — вектор перемещения, \mathbf{I} — единичный тензор, μ, ν — параметры материала.

Предполагается, что края пластинки закреплены произвольно, а на верхней лицевой плоскости приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = q(x, y)$ (рис. 1).