УДК 517.54

Е.В. Разумовская

ОБ ОДНОМ КОЭФФИЦИЕНТНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ В ПОДКЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ «ТИПИЧНО» ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть C — класс Каратеодори функций $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$, аналитических в единичном круге $E = \{z : \ |z| < 1\}$, $\mathrm{Re}\, p(z) \geq 0$. Выделим его подкласс $C(\alpha, \gamma)$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{1-\alpha}$, функций $h(z)$: $h(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots$ таких, что $h(z) = \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)p(z)+\alpha} + \gamma$, $p(z) \in C$. Через S обозначим класс всех аналитических и однолистных в круге E функций $f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ и рассмотрим его подклассы: $S^M = \{f(z) \in \in S,\ |f(z)| < M \ \ \forall\, z \in E,\ 1 < M < \infty\}$ — класс однолистных ограниченных функций и $S^M(\alpha, \gamma)$, который вводится по аналогии с S^M [1, 2]: если обозначить $C_t(\alpha, \gamma)$ подкласс $C(\alpha, \gamma)$ функций $h(z, t)$, определенных на $E \times [0, \log M]$ и удовлетворяющих условию: $h(\cdot, t) \in C(\alpha, \gamma)$ для почти всех $t \in [0, \log M]$; $h(w, \cdot)$ измерима на $[0, \log M]$ $\ \forall\, w \in E$, то будем говорить, что функция $f(z) \in S^M(\alpha, \gamma)$. Она представима в виде

$$f(z) = M f(z, \log M, h), \tag{1}$$

где $f(z, t, h)$ — решение дифференциального уравнения Лёвнера – Куфарева

$$\frac{dw}{dt} = -w h(w, t), \quad t \in [0, \log M], \quad h \in C_t(\alpha, \gamma)$$

с начальным условием $w|_{t=0} = z$, $z \in E$. А также будем говорить, что $f(z) \in S_R^M(\alpha, \gamma)$, если $f(z) \in S^M(\alpha, \gamma)$ и удовлетворяет в E: $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Экстремальные задачи о начальных коэффициентах класса S и его подклассов, восходящие к знаменитой гипотезе Бибербаха, рассматривались в работах многих математиков. В частности, взаимное изменение второго и третьего коэффициента тейлоровского разложения функций класса $S^M(\alpha, \gamma)$ и $S_R^M(\alpha, \gamma)$ было изучено в работах А.Ю. Васильева [2, 3]. В настоящей статье исследуется множество значений функционала

(a_2, a_2a_3) в классе $S_R^M(\alpha,\gamma)$. Обозначим

$$\Phi_1(\xi) = \xi^3\log^3 M + \frac{\alpha\xi^3\log^2 M}{(1-\alpha)(1-\gamma)} + (1-\alpha)(1-\gamma)\left(\frac{1}{M^2}-1\right)\xi\log M,$$

$$\Phi_2(\xi) = \xi^3\log^3 M - \frac{\xi^3\log^2 M}{1-\gamma} + (1-\alpha)(1-\gamma)\left(\frac{1}{M^2}-1\right)\xi\log M,$$

$$\Phi_3 = 2(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2\left(\frac{1}{M}-1\right)^2\times$$

$$\times\left(4(1-\alpha)(1-\gamma)\left(\frac{1}{M}-1\right)+\left(\frac{1}{M}+1\right)(1-2\alpha)\right).$$

Теорема. *Граница системы функционалов* (a_2, a_2a_3) *в классе* $S_R^M(\alpha,\gamma)$ *определяется в параметрическом виде следующими условиями:*

при $0\le\gamma\le 1$,
если $0\le|\xi|\le\frac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{M}$ *и* $0\le\alpha\le\frac12$, *то* $a_2=\xi\log M$, $|a_2a_3|\le\Phi_1(|\xi|)$, *а при* $1/2\le\alpha<1$, *получаем* $a_2=\xi\log M$, $|a_2a_3|\le\Phi_2(|\xi|)$;

при $1\le\gamma\le\frac{1}{1-\alpha}$,
если $0\le|\xi|\le\frac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{M}$ *и* $0\le\alpha\le\frac12$, *то* $a_2=\xi\log M$, $|a_2a_3|\le\Phi_2(|\xi|)$, *а при* $1/2\le\alpha<1$, *получаем* $a_2=\xi\log M$, $|a_2a_3|\le\Phi_1(|\xi|)$;
если $\frac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{M}\le|\xi|\le 2(1-\alpha)(1-\gamma)$, *то* $a_2=\pm2(1-\alpha)(1-\gamma)\left(\frac{1}{M}-1\right)$, $|a_2a_3|\le\Phi_3$.

Каждая точка границы этого множества значений доставляется единственной функцией, представимой в виде (1), *где*

$$h(z,t) = \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)p(z,t)+\alpha}+\gamma,$$

$$p(z,t) = \frac{\left(1+\frac{p_1(t)}{2}\right)(1+z)^{\frac{1\pm z}{1\mp z}}+\left(1-\frac{p_1(t)}{2}\right)(1-z)}{\left(1+\frac{p_1(t)}{2}\right)(1-z)^{\frac{1\mp z}{1\pm z}}+\left(1-\frac{p_1(t)}{2}\right)(1+z)},$$

$$p_1(t) = [-\xi e^t]_{-2(1-\alpha)|1-\gamma|}^{2(1-\alpha)|1-\gamma|}.$$

Доказательство. В работе [2] описаны границы множества G — взаимного изменения коэффициентов h_1 и h_2 в классе $C_R(\alpha,\gamma)$. Будем решать задачу об экстремуме a_2a_3 при фиксированном a_2 как задачу оптимального управления, задав вектор фазовых координат $(x_1(t),x_2(t)) = (a_2(t),a_3(t))$ и вектор управлений $(u_1(t),u_2(t)) = (h_1(t),h_2(t))$,

$(u_1, u_2) \in G$. Из уравнения Лёвнера – Куфарева получаем динамическую систему [2] и рассматриваем задачу о минимизации функционала:

$$a_2 a_3 = - \int\limits_0^{\log M} [x_2(t) u_1(t) e^{-t} + 2x_1^2(t) u_1(t) e^{-t} + x_1(t) u_2(t) e^{-2t}]\, dt.$$

Составляя функцию Гамильтона и применяя принцип максимума Понтрягина, имеем, что оптимальное управление, доставляющее максимум функции Гамильтона при почти всех $t \in [0, \log M]$, принадлежит границе области G. Исследуя глобальный максимум на G функции Гамильтона при различных значениях параметров α и γ, получаем условия выбора оптимального управления с учётом выхода на границу изменения управления $u_1(t)$. Учитывая, что $t \le \log M$ и подставляя $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в уравнения динамической системы, получаем утверждения теоремы. Справедливость теоремы при $\alpha = 0$ следует из возможности перехода к пределу при $\alpha \to 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.

2. *Васильев А.Ю.* Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных функций // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 1. С. 56–65.

3. *Васильев А.Ю.* Взаимное изменение начальных коэффициентов в подклассах однолистных функций // Вычислительные методы и программирование. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. С. 55–64.

УДК 519.83

В.В. Розен

ДОПУСТИМЫЕ ИСХОДЫ ДЛЯ ВЕЕРНЫХ СТРУКТУР КОАЛИЦИЙ

1. Рассматриваются игры с квазиупорядоченными исходами вида

$$G = \langle (X_i)_{i \in I}, A, (\omega_i)_{i \in I}, F \rangle, \tag{1}$$

где X_i — множество стратегий игрока $i \in I$, $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, A — множество исходов, ω_i — отношение квазипорядка на A, выражающее предпочтения игрока i, $F : \prod\limits_{i \in I} X_i \to A$ — функция реализации. Никаких ограничений на множества A, X_i $(i \in I)$ a priori не накладывается. Под *коалицией* в игре G понимается любое непустое подмножество