

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. 132 с.
2. *Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117
3. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязко-упругих материалов. М. : Наука, 1972. 328 с.

УДК 532.5:533.6.011.5

В. С. Кожанов

О ДВУХ РЕЖИМАХ СХЛОПЫВАНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Изучается заключительный (автомодельный) этап схлопывания одномерной сферической полости в идеальной сжимаемой жидкости. Решение строится в предположении, что течение на рассматриваемом этапе не является гомэнтропическим. Проводится сравнение с соответствующими результатами [1], полученными в рамках традиционного подхода, согласно которому течение вплоть до момента фокусировки сохраняет свойство гомэнтропии.

Полная система уравнений, описывающих неустановившиеся одномерные сферически симметричные течения идеального совершенного газа, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{\rho u}{r} = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial c^2}{\partial r} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{r} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\rho = \rho(r, t)$ — плотность, t — время, $u = u(r, t)$ — скорость частицы жидкости, r — координата, γ — показатель адиабаты, $c^2 = c^2(r, t)$ — квадрат скорости звука.

Пусть начальная плотность жидкости распределена в пространстве по степенному закону $\rho_0 = ar^\omega$, $a, \omega = \text{const}$. Соответствующие автомодельные решения имеют вид (α — показатель автомодельности)

$$\begin{aligned} r = C(-t)^\alpha \xi, \quad u = -\alpha C(-t)^{\alpha-1} F(\xi), \quad c^2 = \alpha^2 C^2 (-t)^{2\alpha-2} G(\xi), \\ \rho = aC^\omega (-t)^{\alpha\omega} R(\xi), \quad C = \text{const}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ξ — независимая автомодельная переменная, $F(\xi)$, $G(\xi)$ и $R(\xi)$ — автомодельные представители скорости частицы жидкости u , квадрата скорости звука c^2 и плотности ρ соответственно.

Подставляя (2) в (1), получим три обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ), которые с учётом замены $F(\xi) = \xi V(\xi)$, $G(\xi) = \xi^2 Z(\xi)$ приводят к уравнению на фазовой плоскости (V, Z) и двум квадратурам:

$$\frac{dZ(V)}{dV} = \frac{Z(V) [[2(1 - \alpha V) - (\gamma - 1)\varkappa] \Delta_0 - (\gamma - 1)(V - 1)\Delta_4]}{[-2\alpha V + \varkappa]\Delta_0 + (V - 1)\Delta_4}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (1 - V)^2 - Z(V), \quad \Delta_4 = 2\alpha V^2 + (1 - 3\alpha - \varkappa)V + \varkappa, \\ \varkappa &= 2(1 - \alpha - \alpha\omega/2)/\gamma. \end{aligned}$$

Введём в рассмотрение энтропийную функцию $s(r, t)$:

$$s = p\rho^\gamma = \gamma^{-1}c^2\rho^{1-\gamma}. \quad (4)$$

Подстановка (2) в (4) даёт

$$\begin{aligned} s &= \alpha^2 C^{2+\omega(1-\gamma)} a^{1-\gamma} (-t)^{2\alpha-2+\alpha\omega(1-\gamma)} S(\xi), \\ S(\xi) &= \gamma^{-1} G(\xi) R^{1-\gamma}(\xi). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5), привлекая 1-е соотношение (2), можно восстановить начальный закон распределения s :

$$s_0 = \alpha^2 C^{2/\alpha} a^{1-\gamma} r^{2-2/\alpha+\omega(1-\gamma)}. \quad (6)$$

Вдоль траектории частицы s сохраняет постоянное значение, которое соответствует начальному положению частицы в пространстве. Из (6) следует, что в общем случае (при произвольных значениях γ , ω и α) частицы, находящиеся до начала процесса на разных расстояниях от центра, будут нести в себе различную энтропию. При этом будет сформирован некоторый профиль $s(r, t) \neq \text{const}$. Однако если в начальный момент все частицы будут обладать одинаковой энтропией, то это вместе со свойством сохранения энтропии в частице приведёт к постоянству s во всей области течения. Такое возможно, если s_0 , определяемое выражением (6), не будет явно зависеть от координаты r , т.е. если

$$\omega = \omega_h = -\frac{2(1 - \alpha)}{\alpha(1 - \gamma)} < 0. \quad (7)$$

Свойство сохранения энтропии в пространстве носит название *гом-энтропии*. Соответствующий режим течения называется гомэнтропическим, а условие (7) для автомодельных движений является условием гом-энтропии.

В соответствии с традиционным подходом [1, 2] к изучению задачи о схлопывании полости течение предполагается гомэнтропическим вплоть до момента фокусировки полости в центре. Вместо 3-го уравнения (1) используется условие $\gamma^{-1}c^2\rho^{1-\gamma} = s_0 = \text{const}$, которое позволяет исключить из рассмотрения плотность. При изучении автомодельных движений оказывается, что требование $s_0 = \text{const}$ неявно задаёт степенной закон распределения начальной плотности жидкости $\rho_0 = ar^{\omega_h}$. Если же потребовать $\rho_0 = \text{const}$, то $\omega = 0$, и режим схлопывания полости на заключительной стадии в соответствии с (6) уже не будет гомэнтропическим. Отметим, что в рамках автомодельной теории нельзя построить течение с одновременно произвольными начальными профилями плотности и энтропии.

Таким образом, будем рассматривать два режима: 1) $\rho_0 = \text{const}$, $s_0 = s_0(r)$ и 2) $s_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \rho_0(r)$.

Чтобы найти течение в области за границей полости, необходимо при заданных значениях γ и ω решить краевую задачу для уравнения (3), связанную с подбором показателя автомодельности α . При искомом значении α интегральная кривая уравнения (3), соединяющая точки $P_1(1, 0)$ и $P_4(0, 0)$, будет определённым образом проходить через особую точку типа узел P_{23} с координатами (см. [1])

$$V_{23} = \left(-B \pm \sqrt{B^2 - 8\alpha\kappa} \right) / (4\alpha), \quad Z_{23} = (1 - V_{23})^2, \quad B = 1 - 3\alpha - \kappa.$$

Точки P_1 и P_4 отвечают граничным условиям на свободной поверхности и на ∞ , точка P_{23} является образом предельной характеристики (ПХ).

Если $\gamma_1 \leq \gamma$, то интегральная кривая должна проходить через точку P_{23} вдоль уса отдельного направления, а если $3/2 \leq \gamma < \gamma_1$, — то вдоль уса общего направления. В случае $\rho_0 = \text{const}$ $\gamma_1 = 10.0813$, а в случае $s_0 = \text{const}$ $\gamma_1 = 8.4635$. При $\gamma = 3/2$ показатель $\alpha = 1$, откуда следует, что $\omega_h = 0$, и решения для двух режимов совпадают. При $\gamma < 3/2$ искомый показатель $\alpha > 1$, т.е. скорость границы полости в центре фокусировки равна нулю.

На рис. 1–4 демонстрируются распределения автомодельных представителей скорости, давления, плотности и энтропийной функции на стадии схлопывания для двух режимов. Сплошные кривые соответствуют 1-му режиму, а пунктирные — 2-му режиму; знаком «□» отмечена граница полости, знаком «◇» — ПХ.

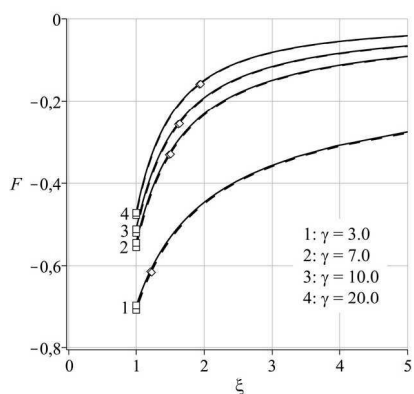


Рис. 1

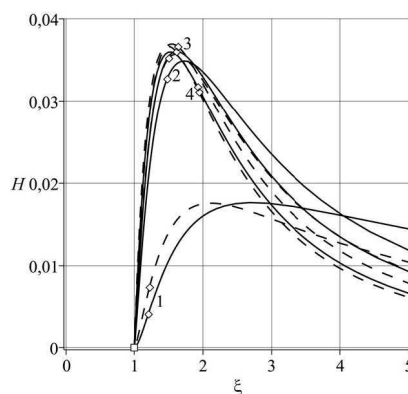


Рис. 2

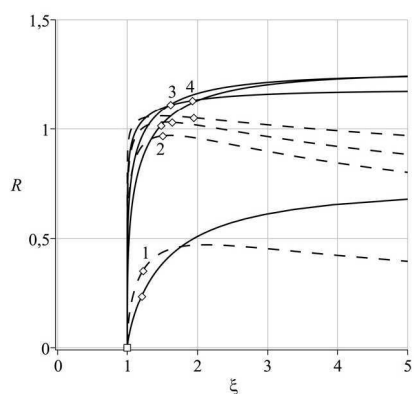


Рис. 3

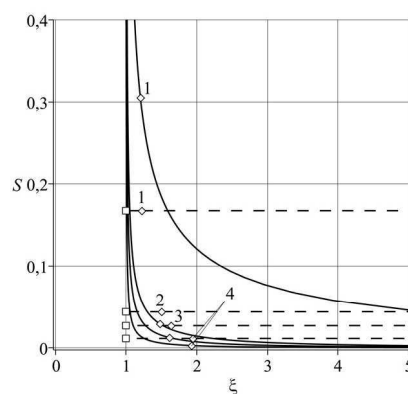


Рис. 4

Из графиков следует, что наиболее существенные отличия в распределении имеют плотность и энтропия. При этом для первой модели энтропия принимает экстремально высокие значения на границе полости. Подобное поведение энтропии наблюдается в центре симметрии при изучении автомодельных задач о сильном взрыве и сходящейся ударной волне для случая негомэнтропических течений. Напротив, в поведении скоростей частиц качественное и количественное различие для двух моделей не существенно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кожанов В. С. Расчет отраженных ударных волн в задаче о схлопывании пустой полости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2010. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 10, вып. 1. С. 44–54.
2. Хантер К. О захлопывании пустой полости в воде // Механика : период. сб. пер. иностр. ст. 1961. № 3 (67). С. 77–100.