2. *Ольшанский В. Ю., Серебряков А. В., Абитова И. Ф.* О влиянии граничных условий на динамику чувствительного элемента пьезогироскопа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Сер. Физика. Т. 11, вып. 2. С. 51–54.

3. *Панкратов В. М., Ольшанский В. Ю., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В.* Влияние диссипации на характеристики измерителя угловой скорости на основе взаимного пьезоэффекта // Авиакосмическое приборостроение. 2010. № 8. С. 3–8.

УДК 517.51

И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В настоящей статье исследуется следующая задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА): необходимо определить ограниченное по модулю управление $\mathbf{u}$:

$$-u_{max} \le u \le u_{max} < \infty, \quad u = \pm|\mathbf{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \;\; \boldsymbol{\omega}_\eta = u\frac{r}{c}\boldsymbol{i}_1 + \frac{c}{r^2}\boldsymbol{i}_3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \;\; r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \;\; c = \mathrm{const},$$

из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ \left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

в конечное состояние

$$t = t_1 = ?, \quad \varphi(t_1) = \varphi_1, \quad \mathrm{vect}\left[\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(t_1) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi}{2}\right)\right] = 0.$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J_1 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2)\, dt \text{ или } J_2 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|)\, dt, \; \alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const} \ge 0.$$

При $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ имеем задачу быстродействия.

Здесь $\boldsymbol{\lambda}$ — кватернион ориентации орбитальной системы координат, $\boldsymbol{\Lambda}$ — кватернион ориентации орбиты КА, r — модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ центра масс КА, c — постоянная площадей, p и e — параметр и эксцентриситет орбиты, φ — истинная аномалия. Верхняя волна — символ сопряжения. Величины c, p, e, φ_0, $\boldsymbol{\Lambda}^0$, $\boldsymbol{\Lambda}^*$ — заданы; подлежат определению t_1, φ_1 и оптимальный закон управления $u = u(t)$.

Поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Понтрягина. Были построены система дифференциальных уравнений для сопряженных переменых, законы оптимального управления. Исходная задача сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории 10-го порядка. Авторами предложен оригинальный алгоритм численного решения указанных дифференциальных краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА, являющийся комбинацией методов Рунге — Кутта 4-го порядка точности, Ньютона, градиентного спуска. Приводятся примеры расчетов. Построены графики оптимальных траекторий и управлений, функции переключения управления.

Начальные и конечные значения угловых элементов орбиты задавались равными:

$$\begin{aligned} &\Omega_0 = 40.00^\circ, \quad I_0 = -70.57^\circ, \quad \omega_{\pi 0} = 84.98^\circ; \\ &\Omega_1 = 72.00^\circ, \quad I_1 = 47.00^\circ, \quad\ \ \omega_{\pi 1} = 45.02^\circ. \end{aligned}$$

Здесь Ω — долгота восходящего узла, I — наклонение орбиты, ω_π — угловое расстояние до перицентра.

Начальное и конечное положения орбиты КА рассчитаны по значениям декартовых координат и проекций скорости КА, приведенным в [1, стр. 95].

Начальное и конечное значения кватерниона ориентации орбиты, соответствующие этим значениям угловых элементов, равны:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}^0 &= (\ \ \ 0.678275, \ \ -0.245862, \ \ -0.593909, \ \ -0.353860); \\ \boldsymbol{\Lambda}^* &= (\ -0.440542, \ \ -0.522476, \ \ -0.125336, \ \ -0.719189). \end{aligned}$$

При этом начальное значение кватерниона ориентации орбитальной системы координат равно ($\varphi_0 = 3.940323$ рад.):

$$\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (0.061834, \ \ -0.451574, \ \ 0.457446, \ \ 0.763545).$$

На рис. 1 приведены результаты решения в безразмерных переменных краевой задачи для функционала $\int_0^{t_1}(1 + 4.2u^2)dt \to \min\,(e = 0.25)$, на рис. 2 — для $\int_0^{t_1} |u| dt \to \min\,(e = 0.5)$, на рис. 3 — для случая быстродействия ($e = 0.0$). μ_j, ν_j, $j = \overline{0,3}$, — компоненты кватерниона $\boldsymbol{\mu}$, сопряженного по отношению к фазовому кватерниону $\boldsymbol{\lambda}$, и $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$ соответственно. Отметим, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях появляется характерный безразмерный параметр $N = u_{\max} p^3 / c^2$. При численном решении полагалось, что $N = 0.35$.

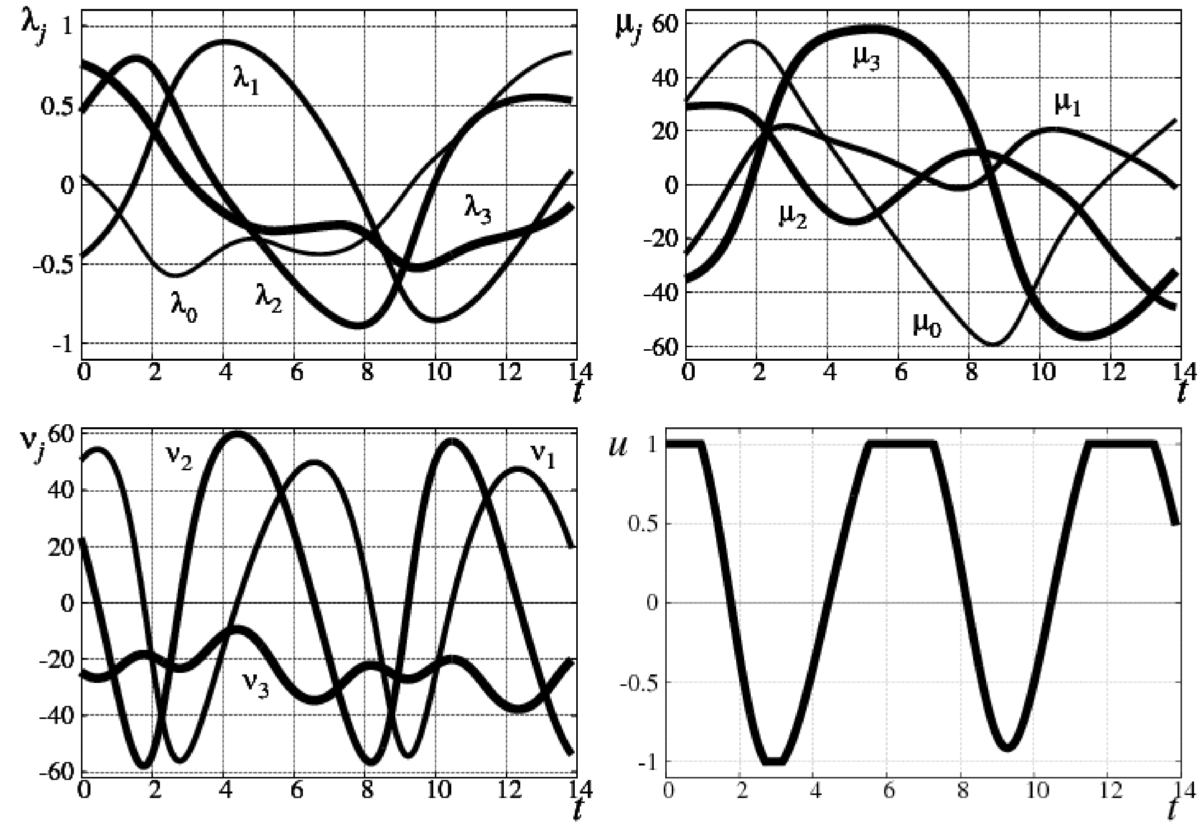


Рис. 1

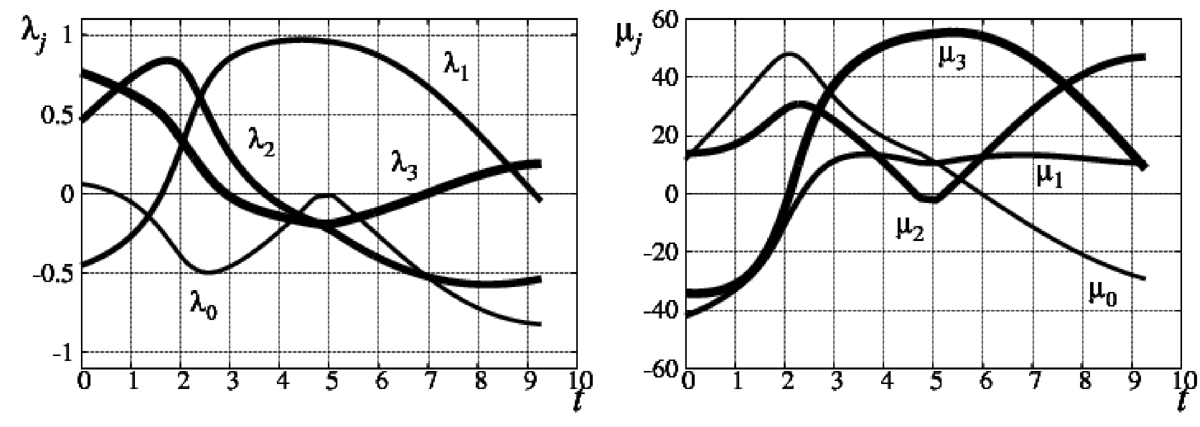
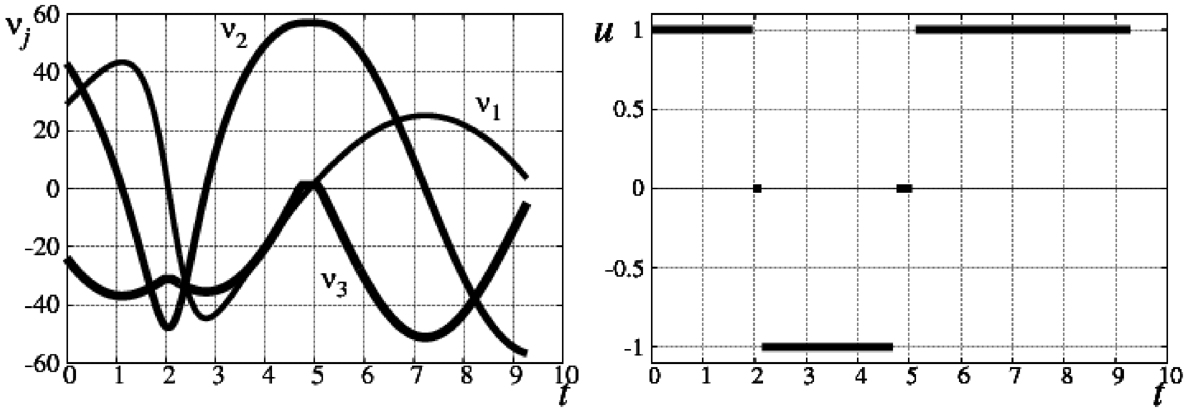


Рис. 2



Продолжение рис. 2

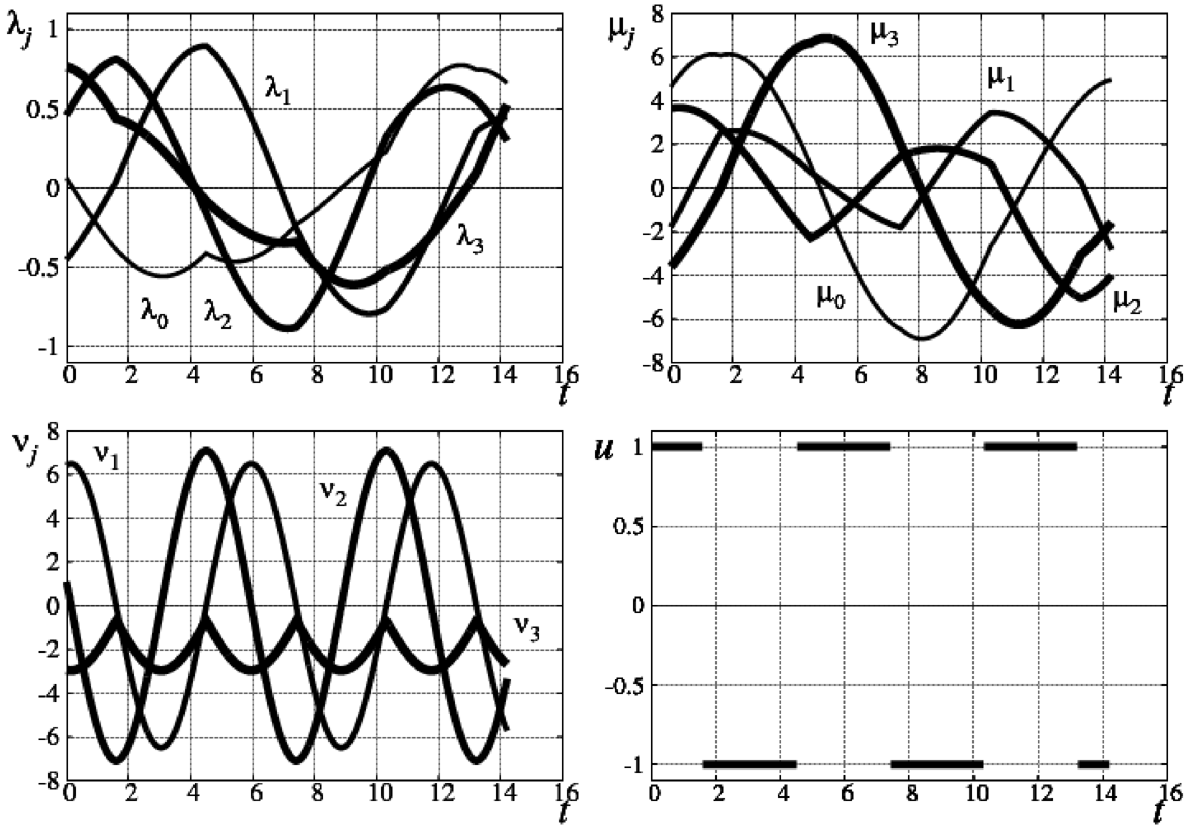


Рис. 3

Отметим, что длительности процесса переориентации орбиты КА и значения минимизируемых функционалов совпадают с результатами, полученными в [2]. При этом отличаются начальные значения и законы изменения сопряженных переменных.

В работе [3] приведены различные варианты условий трансверсальности для рассматриваемой задачи. Наилучшая сходимость наблюдалась при выборе условий трансверсальности

$$\text{при } t = t_1 \quad 2\chi + \nu_3 = 0, \quad \nu_0 \cos\frac{\varphi}{2} + 2\chi \sin\frac{\varphi}{2} = 0,$$

где χ – переменная, сопряженная по отношению к истинной аномалии φ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00 165).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бордовицына Т. В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1983. 136 с.

2. *Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.* Численное исследование задачи управления ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 170-173.

3. *Челноков Ю. Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231-234.

УДК 539.3

Ю. О. Растегаев

ВЛИЯНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО РАСШИРЕНИЯ ПЪЕЗОЭЛЕМЕНТОВ НА ВЕЛИЧИНУ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ПЪЕЗОГИРОСКОПА

В настоящей статье изучается влияние температурного поля на характеристики пьезогироскопа. Учитывается температурное расширение пьезоэлектрических пластинок и несимметричность их расположения по отношению к источнику тепла. Рассматривается модель пьезогироскопа, предложенная в работе [1].

Решение поставленной задачи проводилось в несколько этапов. В первую очередь необходимо было решить подзадачу нахождения температурного поля пьезогироскопа в любой момент времени при различных вариациях конфигурации прибора.

Считаем, что рассматриваемый прибор состоит из n обособленных частей, далее называемых элементами конструкции (ЭК), каждая из которых представляет собой прямоугольный параллелепипед. При построении температурной модели прибора использовался метод теплового баланса [2]. Для применения метода использовалась трехмерная сетка и все элементы конструкции разбивались на равные кубы. Для каждого элемента разбиения (ЭР) составлялось уравнение теплового баланса. Благодаря данному способу разбиения, каждый ЭР имеет контакт максимум с шестью другими элементами и соприкасается с ними по всей поверхности грани.

Формула для расчета температуры ЭР имеет вид