УДК 629.78

Я. Г. Сапунков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КА С КОМБИНИРОВАННОЙ ТЯГОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

В статье для космического аппарата (КА), снабженного солнечным парусом и двигателем малой тяги, с использованием кватернионных элементов орбиты с помощью принципа максимума Понтрягина решена пространственная задача об оптимальном выводе аппарата на заданную круговую орбиту. Даны результаты численного решения.

1. В безразмерных кватернионных элементах орбиты

$$\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3), \mathbf{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$$

движение КА с комбинированной тягой (двигатель малой тяги и солнечный парус) описывается системой уравнений (t — время, φ — независимая вспомогательная переменная) [1, 2]

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -Q\mathbf{F}_1 \sin\varphi, \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = Q\mathbf{F}_1 \cos\varphi, \frac{dt}{d\varphi} = u^2\sqrt{2Q},$$

$$Q = A^2 + B^2, \mathbf{q} = P(\mathbf{u}) \left(\mathbf{p} + \varepsilon \frac{(P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{n})^2}{(u^2)^4}\mathbf{n}\right), \mathbf{F}_1 = u^2\mathbf{q} + (\mathbf{w}, \mathbf{q})\mathbf{w},$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\cos\varphi + \mathbf{B}\sin\varphi, \mathbf{w} = -\mathbf{A}\sin\varphi + \mathbf{B}\cos\varphi.$$

Радиус–вектор положения КА $\mathbf{r}$ и вектор скорости $\mathbf{v}$ связаны с кватернионными элементами орбиты соотношениями

$$\mathbf{r} = P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{v} = \frac{2}{r(2Q)^{1/2}} P^T(\mathbf{u})\mathbf{w}, P(\mathbf{u}) = \begin{Vmatrix} u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_0 \\ -u_3 & -u_0 & u_1 \end{Vmatrix}.$$

Безразмерные управляющие векторные параметры, характеризующие малую тягу $\mathbf{p}$ и единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ к плоскости солнечного паруса, удовлетворяют ограничениям $|\mathbf{p}| \le p_{\max}$, $|\mathbf{n}| = 1$. Размерные масштабные множители для расстояния, скорости, времени, малой тяги и тяги, создаваемой солнечным парусом, определяются выражениями

$$R, (\gamma M/R)^{1/2}, R^{3/2}/(\gamma M)^{1/2}, \gamma M/R^2, p_{\max} = \frac{p^*_{\max}}{\gamma M R^{-2}},$$

$$\mathbf{p}^*_{\text{сол. пар}} = d\frac{\cos^2\theta}{r^{*2}}\mathbf{n} = d\frac{(R^T(\mathbf{u}^*)\mathbf{u}^*, \mathbf{n})^2}{(u^{*2})^4}\mathbf{n}, \frac{d}{\gamma M} = \varepsilon \ll 1.$$

Здесь R — масштаб расстояния, M — масса притягивающего центра, γ — гравитационная постоянная, $p^*_{\max}$ — максимальное значение малой тяги, $\mathbf{p}^*_{\text{сол. пар}}$ — величина тяги, которую создаёт солнечный парус (обе тяги отнесены к единице массы КА), θ — угол между нормалью к солнечному парусу и радиус-вектором КА, d — величина, характеризующая размер паруса и массу КА. Состояние КА в начальный момент времени

$$t = 0, \varphi = 0, \mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{н}}, \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{н}}. \tag{1}$$

Круговая орбита, на которую необходимо перевести КА, характеризуется классическими элементами орбиты $a = a_k, e = 0, i = i_k, \Omega = \Omega_k$. Критерий оптимальности процесса управления определяется функционалом с весовыми множителями $\alpha_i \geq 0, i = 0, 1$:

$$I = \int_0^{t_k} (\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{p}^2) dt = \int_0^{\varphi_k} (\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{p}^2) u^2 (2Q)^{1/2} d\varphi.$$

Оптимальному процессу соответствует минимальное значение функционала.

2. Функция Гамильтона – Понтрягина выражается через сопряженные кватернионные переменные $\boldsymbol{\psi}_a$, $\boldsymbol{\psi}_b$, соответствующие кватернионным элементам $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, по формуле

$$H = -(\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{p}^2) u^2 (2Q)^{1/2} + Q(\mathbf{F}_1, \boldsymbol{\Pi}), \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\psi}_b \cos\varphi - \boldsymbol{\psi}_a \sin\varphi.$$

Сопряженные переменные удовлетворяют сопряженной системе дифференциальных уравнений.

Условия для фазовых координат на правом конце траектории имеют вид

$$\begin{gathered} A^2 - a_k = 0, B^2 - a_k = 0, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0, \\ l(\mathbf{B}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1) - a_k \sin i_k \sin \Omega_k = 0, l(\mathbf{B}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_3) - a_k \cos i_k = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Условия трансверсальности на правом подвижном конце траектории

$$\begin{gathered} l(\boldsymbol{\psi_a}, \mathbf{A}) + l(\boldsymbol{\psi_b}, \mathbf{B}) = 0, l(\boldsymbol{\psi_a}, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_1) + l(\boldsymbol{\psi_b}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1) = 0, \\ a_k[l(\boldsymbol{\psi_a}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_3) + l(\boldsymbol{\psi_b}, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_3)] + \\ + l(\mathbf{A}, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_2)[l(\boldsymbol{\psi_a}, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_1) - l(\boldsymbol{\psi_b}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1)] = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Функция Гамильтона – Понтрягина на правом конце траектории удовлетворяет условию

$$H_{\text{opt}} = 0. \tag{4}$$

Оптимальное управление согласно условию максимума для функции Гамильтона – Понтрягина выражается через фазовые и сопряженные переменные [1, 2].

Решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы уравнений для фазовых и сопряженных переменных с граничными условиями (1) в начальный момент времени и условиями (2), (3), (4) в конечный момент времени.

3. Пример расчета. Начало декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ совпадает с центром притяжения, плоскость Ox_1x_2 совпадает с плоскостью орбиты Земли, на которой находится КА в начальный момент времени. Начальное состояние КА определяется координатами:

$$x_1 = 1.0, x_2 = 0, x_3 = 0, \nu_1 = 0, \nu_2 = 1.0, \nu_3 = 0.$$

Классические элементы конечной орбиты определяются соотношениями

$$a_k = 1.52, e_k = 0, i_k = 4.0^\circ, \Omega_k = 25.0^\circ.$$

Весовые множители в функционале качества процесса: $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 1.0$. Ограничения на управляющие параметры: $p_{\max} = 1.0$, $\varepsilon = 0.1$. Конечное состояние КА в момент выхода на заданную орбиту при $t = 3.7376$ определяется координатами

$$x_1 = -1.3263, x_2 = 0.7424, x_3 = -0.0079,$$

$$\nu_1 = -0.3955, \nu_2 = -0.7059, \nu_3 = 0.0564.$$

Время перелета составляет 0.59486 земного года.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00165).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сапунков Я. Г.* Оптимальный вывод на орбиту космического аппарата с комбинированной тягой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд–во Сарат. ун–та, 2010. Вып. 12. С. 180—183.

2. *Сапунков Я. Г.* Оптимальное управление движением космического аппарата с солнечным парусом // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд–во Сарат. ун–та, 2011. Вып. 13. С. 176–179.