

6. *Тхай В. Н.* Исследование плоской неограниченной задачи трех тел // ПММ : 1996. Т. 60. вып. 3. С. 355–374.

7. *Голубев В. Г., Гребеников Е. А.* Проблема трех тел в небесной механике. М : Изд-во Моск. ун-та, 1985.

УДК 539.3

Н. В. Сергеева

АСИМПТОТИКИ КОРНЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО СЛОЯ

В работах [1-3] на примере упругого слоя и цилиндрической оболочки показана возможность построения дисперсионных кривых с помощью асимптотических приближенных теорий. В [4] приведено численное решение дисперсионного уравнения для наследственно-упругого слоя, материал которого описывается с помощью модели Работнова [5], и его анализ. Настоящая статья посвящена исследованию асимптотического поведения корней дисперсионного уравнения, приведенного в работе [4], при малых частотах.

Будем рассматривать распространение волн в бесконечном наследственно-упругом слое, ограниченном плоскостями $z = \pm h$, в направлении оси x (рис. 1). Свойства материала будем описывать уравнениями состояния, взятыми в интегральной форме. В качестве ядра интегрального оператора возьмем дробно-экспоненциальную функцию Работнова [5]:

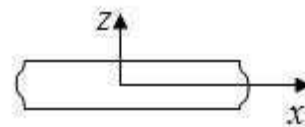


Рис. 1

$$\mathfrak{E}_{-\frac{1}{2}}(-\beta, t) = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

где β — параметр материала, t — время.

При изучении собственных колебаний будем исследовать свойства тех мод, которые изменяются по времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения, уравнениям состояния, записанным в перемещениях и напряжениях, и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях. Тогда решение для перемещений v_i будем искать в виде

$$v_i = v_i(z) \exp(i\omega t - (\alpha + i\chi)x), \quad (1)$$

где ω — частота, χ — волновое число, $\alpha > 0$ — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты x .

Рассмотрим случай симметричного по нормальной координате НДС, когда перемещение v_1 и напряжения σ_{11} , σ_{33} являются четными по нормальной координате функциями, а v_3 , σ_{13} — нечетными. В этом случае приходим к следующему дисперсионному уравнению

$$\gamma^4 \cosh(a) \frac{\sinh(b)}{b} - a^2 \tilde{\chi}^2 \frac{\sinh(a)}{a} \cosh(b) = 0, \quad (2)$$

где $\gamma^2 = \tilde{\chi}^2 - \frac{\Omega^2}{2}$, $i\tilde{\chi} = \alpha_* + i\chi_*$, $\alpha_* = h\alpha$, $\chi_* = h\chi$, $a^2 = \tilde{\chi}^2 - \kappa_F^2 \Omega^2$, $b^2 = \tilde{\chi}^2 - \Omega^2$, $\kappa_F^2 = \frac{1 - 2\nu^F}{2 - 2\nu^F}$, $\Omega^2 = \omega_*^2 \frac{2(1 + \nu^F)}{(1 + \nu)E^F}$, $\omega_* = \frac{h}{c_2}\omega$, $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \nu)\rho}}$, $\nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}$, $E^F = 1 - \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}$, $k_* = \sqrt{\frac{h}{c_2}}k$, $\beta_* = \sqrt{\frac{h}{c_2}}\beta$. k — параметр материала, ρ — плотность материала. В дальнейшем звездочки опускаем.

Дисперсионное уравнение (2) было решено численно в [4] методом математического микроскопа [6]. Кроме того, был проведен анализ полученных численных решений при различных значениях параметров материала. В данной статье получены асимптотики корней дисперсионного уравнения для малых ω .

Анализ уравнения и численного решения показал, что один корень при $\omega \rightarrow 0$ ведет себя как $O(\omega)$, а остальные имеют порядок $O(1)$. Поэтому асимптотики корней при $\omega \rightarrow 0$ ищем в виде

$$\chi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_{1m} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad \alpha_1 = \sum_{m=1}^{\infty} d_{1m} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad (3)$$

$$\chi_n = c_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad \alpha_n = d_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad n > 1. \quad (4)$$

Найдем сначала коэффициенты формул (3), для этого подставляем (3) в уравнение (2) и раскладываем функции a , b , гиперболические синусы и косинусы от них в степенные ряды по степеням $\sqrt{\omega}$, группируем

элементы с одинаковыми степенями ω . Поскольку получившийся степенной ряд по $\sqrt{\omega}$ равен нулю тождественно только в том случае, когда равны нулю все его коэффициенты, то получаем бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомым коэффициентов разложения. Решая полученную систему, находим следующие асимптотики корней для первых мод в окрестности нулевой частоты с точностью $O(\omega^2)$:

$$\chi_1 = c_{12}\omega + c_{13}\omega^{\frac{3}{2}} + O(\omega^2), \quad \alpha_1 = d_{13}\omega^{\frac{3}{2}} + O(\omega^2), \quad (5)$$

где c_{12} , c_{13} , d_{13} — функции, зависящие от ν , k , β .

Подставляя (4) в уравнение (2), получим бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомым коэффициентов разложения, из которой имеем следующее уравнение для определения нулевых приближений c_{n0} , d_{n0} рядов (4):

$$\sinh(2(c_{n0} + id_{n0})) + (2(c_{n0} + id_{n0})) = 0. \quad (6)$$

Решая уравнение (6) асимптотическим методом, получаем выражения для коэффициентов разложения c_{n0} , d_{n0} в виде

$$c_{n0} = \frac{1}{2} \ln(4\pi n), \quad d_{n0} = \frac{3\pi}{4}n - \frac{\ln(4\pi n)}{4\pi n}.$$

Подставляя c_{n0} , d_{n0} в следующее уравнение системы, находим c_{n1} , d_{n1} и т.д. Асимптотики корней при $n > 1$ примут вид:

$$\chi_n = c_{n0} + c_{n1}\omega^{\frac{1}{2}} + O(\omega), \quad \alpha_n = d_{n0} + d_{n1}\omega^{\frac{1}{2}} + O(\omega), \quad (7)$$

где c_{n1} , d_{n1} — функции, зависящие от ν , k , β , причем $c_{n1} \ll 1$, $d_{n1} \ll 1$.

При $k = 0$ асимптотика корней дисперсионного уравнения, соответствующая первой моде, совпадает с аналогичной асимптотикой, полученной в [1] для случая упругого слоя.

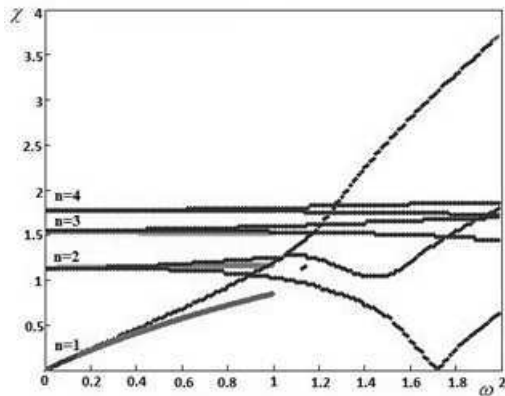


Рис. 2

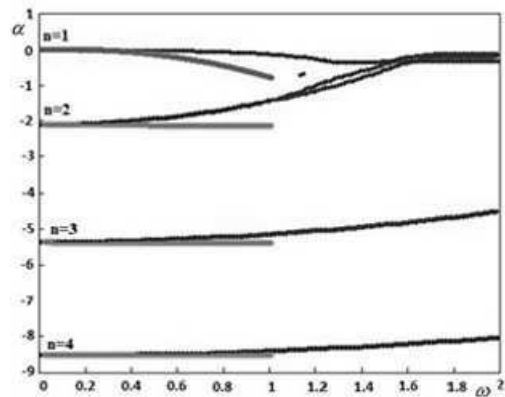


Рис. 3

На рис. 2 приведены проекции на плоскость (ω, χ) ветвей дисперсионного спектра и асимптотик корней для нескольких первых мод для случая $\nu = 0.3$, $k = 0.53$, $\beta = 1$. Асимптотики корней изображены серыми линиями. Численные решения представлены черными линиями. На рис. 3 приведены проекции на плоскость (ω, α) ветвей дисперсионного спектра и асимптотик корней для нескольких первых мод для того же случая.

Из графиков видно, что численные и асимптотические решения хорошо совпадают на интервале $0 \leq \omega \leq 0.4$. А с увеличением номера n наблюдается расширение интервала совпадения асимптотик с численным решением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю. Дисперсионные уравнения Релея — Лэмба". Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. 21 с.
2. Karapınar J. D., Kossovich L. Ju., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies Jan Diego : Academic Press, 1998. PP. 226.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев : Наук. думка, 1981. 284 с.
4. Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В. Гармонические волны в наследственно-упругом слое: случай симметричного по нормальной координате НДС // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 119–122.
5. Работнов Ю. И. Элементы наследственной механики твердых тел. Наука. 1977. 384 с.
6. Березин В. Л., Харитонова К. Ю. Применение метода математического микроскопа при решении трансцендентных уравнений // Проблемы точной механики и управления : Сб. науч. тр. / Институт проблем точной механики и управления РАН. Саратов. 2004. С. 119–122.

УДК 532.5:533.6.011.5

И. А. Чернов

ОБ УЧЕТЕ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВЗРЫВЕ С ОБРАЗОВАНИЕМ ПУСТОТЫ В ЦЕНТРЕ ВЗРЫВА

Л. И Седов и независимо от него Тейлор [1] показали, что при сильном точечном взрыве в случаях показателя адиабаты $\gamma > 7$ в центре взрыва (ЦВ) возникает пустота, граница которой движется от ЦВ. В статье приведены детали двух типов (с- и без каверны) таких течений в автомобильной постановке, дано обсуждение задачи об учете противодействия для течения с каверной и расчет поправки к автомобильному течению. Обширная библиография по задаче о точечном взрыве есть в [2].