Овализация поперечных сечений наиболее опасна для конструкций с параметром $\bar{l} \approx 3$. При этом напряжения могут превышать напряжение $\sigma_{10\,\max}$ в три раза. Учет тонкостенности оболочки обязателен при параметре A>0.6.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Аксельрад Э. Л., Ильин В. П.* Расчет трубопроводов. Л. : Машиностроение, 1972. 240 с.

2. *Кан С. Н.* несущая способность круговых цилидрических оболочек при изгибе // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника, 1963. № 4. С. 18–21.

3. *Антоненко Э. В.* Учет искривления оси в расчете на прочность круговой цилиндрической оболочки // Прикладная механика. 1981. Т. XVII, № 5. С. 83–88.

4. *Кан С. Н.* Строительная механика оболочек. М. : Машиностроение, 1966. 508 с.

УДК 531.383:532.516

А. Ю. Блинкова

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ВЯЗКО-УПРУГИМИ СТЕНКАМИ ТРУБЫ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ

Волновые процессы в вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках, не взаимодействующих с вязкой жидкостью, рассмотрены в [1–3].

Рассмотрим бесконечно длинную вязкоупругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{1}{2}V^2 + \mathrm{rot}\bar{V} \times \bar{V} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\cdot p = -\nu \mathrm{rotrot}\bar{V},\\ \mathrm{div}\bar{V} = 0.\end{gathered} \qquad (1)$$

ρ — плотность; p — давление; ν – кинематический коэффициент вязкости. На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости

$$V_r = -\frac{\partial W}{\partial t},\ V_x = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_1 - W. \qquad (2)$$

Здесь V_r, V_x — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; t — время; W — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки; U – продольное упругое перемещение оболочек по оси x; R_1 — внутренний радиус оболочки.

Связь между компонентами напряжений σ_x, σ_y и деформаций зададим уравнениями квадратичной теории вязкоупругости [4], учитывающей линейную упругость объёмных деформаций

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_y) - \frac{E}{1+\mu_0}\alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}(1+a\varepsilon_u^2)e_x d\tau, \quad (3)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_y + \mu_0\varepsilon_x) - \frac{E}{1+\mu_0}\alpha\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}(1+a\varepsilon_u^2)e_y d\tau. \quad (4)$$

Здесь E — модуль Юнга, μ_0 — коэффициент Пуассона материала оболочек (считая их одинаковыми), t — время; α, β — параметры вязкоупругости; ε_u^2 — квадрат интенсивности деформаций, e_x, e_y — компоненты девиатора деформаций:

$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y); \quad e_x = \frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y, \quad e_y = \frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_x. \quad (5)$$

Связь между компонентами деформации e_x, e_y и перемещениями U, W — стандартная.

Разлагая функции $(1+a\varepsilon_u^2)e_x, (1+a\varepsilon_u^2)e_y$ в ряд Тейлора по степеням $(t-\tau)$, при условии $\beta t \gg 1$ сохраняем два члена разложения их формул (3), получим приближенные уравнения состояния (см. [1–3])

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_y) + p[\frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y + a(\overset{2}{e_u} e_x)],\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_y + \mu_0\varepsilon_x) + p[\frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_x + a(\overset{2}{\varepsilon_u} e_y),]\end{aligned} \quad (6)$$

где введен оператор p такой, что

$$pf = \frac{E}{1+\mu_0}(\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta}f). \quad (7)$$

Вычисляя с использованием (6) усилия и моменты по формулам

$$N_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x dz, N_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_y dz, M_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x z dz, M_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_y z dz \quad (8)$$

и подставим (8) в систему уравнений динамики оболочек

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - p_0 h_0\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x, \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R}N_y + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial W}{\partial x}N_x) - p_0 h_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -q_n. \quad (9)$$

Здесь h_0 — толщина оболочки; q_x, q_n — напряжения, действующие со стороны жидкости на поверхность оболочки, снесенные на невозмущаемую поверхность оболочки ($W \ll R$), R — радиус срединной поверхности оболочки.

$$q_x = [\rho\nu(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x})]_{r=R}, q_n = [-\rho + 2\rho\nu\frac{\partial V_r}{\partial r}]_{r=R}$$

За характерную длину примем длину волны деформации l, перейдем к безразмерным переменным

$$W = w_m u_{30},\ U = u_m u_{10},\ t^* = \frac{c_0}{l}t,\ x^* = \frac{x}{l},\ c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0\left(1-\mu_0^2\right)}},$$

где c_0 — скорость звука в материале оболочки.

Применяя методы возмущений, найдем связь

$$\frac{w_m}{R}u_{30} = \mu_1\frac{u_m}{l}\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \mu_1 = \frac{\mu_0 + \frac{1}{3}(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta}}{1 - \frac{2}{3}(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta}},$$

определим безразмерную скорость волны

$$c^2 = [1 - \frac{2}{3}(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta}](1-{\mu_1}^2)$$

и уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau} + \frac{u_m}{l\varepsilon}\frac{c}{2}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\varepsilon}(\frac{R}{l})^2{\mu_1}^2\frac{c}{2}\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4} -$$
$$-\frac{2}{3}\frac{a}{\varepsilon}\left(\frac{u_m}{l}\right)^2(1-\mu_0)\frac{\alpha}{\beta}\frac{1+{\mu_1}^4+(1+\mu_1)^4}{c}\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2} -$$
$$-\frac{1}{3}\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{c_0}{l\varepsilon}(1-\mu_0)(1+\mu_1+{\mu_1}^2)\frac{\partial^3 u_{10}}{\partial\xi^3} - 2[1-(2\mu_1)^2]\frac{\rho l\nu}{\rho_0 h_0 R_1 c_0\varepsilon}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi} = 0.$$

Здесь

$$\xi = x^* - ct^*,\ \tau = \varepsilon t^*, \quad \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1),$$

а ε — малый параметр задачи.

При отсутствии жидкости ($\rho = 0$) последнее слагаемое выпадает и уравнение превращается в модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса для $\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}$, имеющее точное частное решение.

В зависимости от физичеких параметров величина μ_1 может быть больше $\frac{1}{2}$, меньше $\frac{1}{2}$ или равна $\frac{1}{2}$. Последний случай эквивалентен отсутствию жидкости, но означает, что жидкость не влияет на волну деформации.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента (проект МД-1025.2012.8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. 132 с.

2.*Аршинов Г. А.,Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН. Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117

3.*Аршинов Г. А., Могилевич Л. И.* Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов : Сарат. гос. агр. ун-т, 2000. 152 с

4. *Москвитин В. В.* Сопротивление вызко-упругих материалов. М. : Наука, 1972. 328 с.

УДК 539.3

Г. М. Иванов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАСТЯЖЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ И СВОБОДНЫМ ОТВЕРСТИЯМИ

В статьях [1–4] разработаны приближенные методы решения обратных задач плоской теории упругости и изгиба тонких изотропных плит для многосвязных областей с неизвестной границей. В данной статье приводится решение задачи по определению равнопрочных контуров двух отверстий в растягиваемой изотропной пластинке при условии, что одно из них подкреплено жестким кольцом, а другое свободно от внешних усилий.

Рассмотрим всестороннее растяжение усилиями p тонкой изотропной пластинки, ослабленной двумя криволинейными отверстиями, причем размер одного из них значительно превышает размер другого. На первом равнопрочном контуре, подкрепленным жестким кольцом, должны выполняться граничные условия

$$\sigma_r = P; \quad \sigma_\theta = \nu P; \quad \tau_{r\theta} = 0, \tag{1}$$

а на втором равнопрочном контуре, свободном от внешних усилий, — условия:

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = Q; \quad \tau_{r\theta} = 0. \tag{2}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, P, Q — постоянные подлежащие определению.