$(u_1, u_2) \in G$. Из уравнения Лёвнера – Куфарева получаем динамическую систему [2] и рассматриваем задачу о минимизации функционала:

$$a_2 a_3 = -\int\limits_0^{\log M} [x_2(t)u_1(t)e^{-t} + 2x_1^2(t)u_1(t)e^{-t} + x_1(t)u_2(t)e^{-2t}]\, dt.$$

Составляя функцию Гамильтона и применяя принцип максимума Понтрягина, имеем, что оптимальное управление, доставляющее максимум функции Гамильтона при почти всех $t \in [0, \log M]$, принадлежит границе области G. Исследуя глобальный максимум на G функции Гамильтона при различных значениях параметров α и γ, получаем условия выбора оптимального управления с учётом выхода на границу изменения управления $u_1(t)$. Учитывая, что $t \leq \log M$ и подставляя $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в уравнения динамической системы, получаем утверждения теоремы. Справедливость теоремы при $\alpha = 0$ следует из возможности перехода к пределу при $\alpha \to 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.

2. *Васильев А.Ю.* Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных функций // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 1. С. 56–65.

3. *Васильев А.Ю.* Взаимное изменение начальных коэффициентов в подклассах однолистных функций // Вычислительные методы и программирование. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. С. 55–64.

УДК 519.83

В.В. Розен

ДОПУСТИМЫЕ ИСХОДЫ ДЛЯ ВЕЕРНЫХ СТРУКТУР КОАЛИЦИЙ

1. Рассматриваются игры с квазиупорядоченными исходами вида

$$G = \langle (X_i)_{i \in I}, A, (\omega_i)_{i \in I}, F \rangle, \tag{1}$$

где X_i — множество стратегий игрока $i \in I$, $I = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, A — множество исходов, ω_i — отношение квазипорядка на A, выражающее предпочтения игрока i, $F : \prod\limits_{i \in I} X_i \to A$ — функция реализации. Никаких ограничений на множества A, X_i $(i \in I)$ a priori не накладывается. Под *коалицией* в игре G понимается любое непустое подмножество

$S \subseteq I$. Множество стратегий коалиции S определяется как $X_S = \prod\limits_{i \in S} X_i$, а отношение предпочтения коалиции S задаётся в виде $\omega_S = \bigcap\limits_{i \in S} \omega_i$.

Определение. Стратегия $x_S \in X_S$ называется *возражением коалиции S* на исход $a \in A$, если при любой стратегии дополнительной коалиции $y_{I \setminus S} \in \prod\limits_{i \in I \setminus S} X_i$ выполнено $F(x_S, y_S) \overset{\omega_S}{>} a$.

Исход a называется *допустимым для коалиции S*, если у неё не существует возражений на этот исход.

Исход a называется *допустимым для семейства коалиции $K \subseteq 2^I$* (короче — *K-допустимым*), если он допусти́м для всех коалиций этого семейства.

В статье найдены условия, накладываемые как на компоненты игры G вида (1), так и на структуру коалиций K, обеспечивающие существование в игре G K-допустимых исходов. Статья является продолжением исследований, начатых в [1].

2. Будем говорить, что семейство коалиций K образует *веерную структуру*, если любые две коалиции из K либо не пересекаются, либо одна из них содержится в другой.

Основная теорема. *Пусть в игре G все квазиупорядоченные множества $\langle A, \omega_i \rangle (i \in I)$ удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей (ОВЦ). Тогда для любой веерной структуры коалиций K существует K-допустимый исход.*

Доказательство разбивается на ряд лемм.

Лемма 1. *Из условия ОВЦ для всех $\langle A, \omega_i \rangle (i \in I)$ следует условие ОВЦ для любого квазиупорядоченного множества $\langle A, \omega_S \rangle$, где $S \subseteq A$.*

Действительно, предположим, что существует бесконечно возрастающая последовательность

$$a_1 \overset{\omega_S}{<} \dots \overset{\omega_S}{<} a_k \overset{\omega_S}{<} a_{k+1} \overset{\omega_S}{<} \dots$$

Для каждой пары вида $a_k \overset{\omega_S}{<} a_{k+1}$ найдётся индекс $i_k = 1, \dots, m$, где $m = |S|$, при котором $a_k \overset{\omega_{i_k}}{<} a_{k+1}$. Получаем бесконечную последовательность

$$a_1 \overset{\omega_{i_1}}{<} a_2 \overset{\omega_{i_2}}{<} \dots a_k \overset{\omega_{i_k}}{<} a_{k+1} \overset{\omega_{i_{k+1}}}{<} \dots \tag{2}$$

Так как индексы $i_1, \dots, i_k, \dots$ принимают лишь конечное число значений, хотя бы один из них (например i_p) встречается в последовательности (2) бесконечное число раз. В итоге получаем бесконечно возрастающую последоватеность по отношению $\overset{\omega_{i_p}}{<}$, что противоречит условию ОВЦ в квазиупорядоченном множестве $\langle A, \omega_{i_p} \rangle$.

Для формулировки следующего результата введём

Определение. Пусть K — семейство коалиций. Назовём коалицию $S \in K$ *существенной*, если существует такой исход $a \in A$, который допусти́м для всех коалиций из K, строго содержащихся в S, но не допусти́м для коалиции S. В противном случае коалиция S называется *несущественной.*

Лемма 2. *Исход, допустимый для всех существенных коалиций, принадлежащих K, является допустимым для всех коалиций из K.*

Доказательство. Определим по индукции высоту $h(S)$ коалиций $S \in K$ условием:

$$\begin{cases} h(S) = 0, & \text{если } S \text{ является минимальной в } K \text{ (по включению);} \\ h(S) = \max\limits_{T \subset S,\ T \in K} h(T) + 1. \end{cases}$$

Пусть a — исход, допустимый для всех существенных коалиций из K. Предположим, что a недопусти́м для некоторой коалиции из K. Обозначим через S_0 принадлежащую K коалицию наименьшей высоты, для которой исход a является недопустимым. Тогда по предположению коалиция S_0 несущественная. Так как условие $T \subset S$ влечёт $h(T) < h(S)$, то для всех коалиций $T \subset S_0$, где $T \in K$, исход a является допустимым; получаем, что коалиция S_0 является существенной, что ведёт к противоречию.

Перейдём к доказательству теоремы. Пусть K — веерная структура коалиций. В силу леммы 2 можно считать, что K содержит только существенные коалиции. Для произвольной коалиции $S \in K$ обозначим через K_S множество тех коалиций из K, которые строго содержатся в S.

Пусть $D(K_S)$ — множество исходов, допустимых для всех коалиций из K_S, а $\overline{D}(S)$ — множество исходов, недопустимых для коалиции S. Положим $\Delta(S) = D(K_S) \bigcap \overline{D}(S)$; из определения существенной коалиции следует, что $\Delta(S) \neq \emptyset$. В силу леммы 1 непустое множество $\Delta(S)$ имеет максимальной элемент $a_S \in \Delta(S)$ относительно квазипорядка ω_S. Так как $a_S \in \overline{D}(S)$, то существует возражение x_S коалиции S на исход a_S. Пусть K^* — множество всех максимальных по включению коалиций из K. Для каждой коалиции $S \in K^*$ зафиксирует возражение x_S коалиции S на исход a_S. В силу условия веерности, масимальные коалиции из K^* попарно не пересекаются, поэтому существует такая стратегия x_{S^*} коалиции $S^* = \bigcup\limits_{S \in K^*} S$, для которой её проекция на S совпадает с x_S при любой $S \in K^*$. Ввиду этого при каждой стратегии $y_{I \setminus S^*}$ дополнительной коалиции $I \setminus S^*$ для $S \in K^*$ выполнено

$$F(x_{S^*}, y_{I\setminus S^*}) \overset{\omega_S}{>} a_S. \qquad (3)$$

Покажем, что всякий исход вида $a^* = F(x_{S^*}, y_{I\setminus S^*})$ является допустимым для всех коалиций из K. Проверим вначале это утверждение для масимальной коалиции $S \in K^*$. Убедимся, что a^* допустим для любой коалиции $T \in K_S$. Действительно, по предположению $a_S \in \Delta(S) \subseteq D(K_S)$, т.е. a_S допустим для коалиции T; так как $a^* \overset{\omega_S}{>} a_S$ и $\omega_S \subseteq \omega_T$, то $a^* \overset{\omega_T}{>} a_S$, следовательно, исход a^* тем более допустим для коалиции T. Показали, что $a^* \in D(K_S)$ для $S \in K^*$. Предположим, что a^* недопустим для коалиции S. Тогда $a^* \in \overline{D}(S)$, значит, $a^* \in D(K_S) \bigcap \overline{D}(S) = \Delta(S)$, что вместе с условием (3) приводит к противоречию со свойством масимальности элемента a_S в $\Delta(S)$. Итак, исход a^* указанного вида допусти́м для всякой максимальной коалиции $S \in K^*$, а также для всех содержащихся в ней коалиций семейства K. Учитывая, что всякая коалиция из K либо сама является максимальной, либо строго содержится в некоторой максимальной, получаем окончательно, что исход a^* допусти́м для всех коалиций семейства K.

Отметим ряд следствий доказанной теоремы.

Следствие 1. *Пусть G — игра с квазиупорядоченными исходами, в которой квазиупорядоченные множества $\langle A, \omega_i \rangle$ $(i \in I)$ удовлетворяют условиям ОВЦ. Тогда*

a) для любого семейства K попарно не пересекающихся коалиций существует K-допустимый исход;

b) для любой цепи коалиций K существует K-допустимый исход;

c) существует исход, обладающий свойствами индивидуальной и коллективной рациональности (т.е. допустимый для каждого игрока $i \in I$ и коалиции I всех игроков).

Следствие 2. *В игре G двух игроков, в которой выполнены условия ОВЦ, существует исход, допустимый для всех коалиций.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розен В.В.* Кооперативные игры с квазиупорядоченными исходами // Кибернетика. 1988. № 6. С. 77–82.