УДК 531.383:532.516

И. А. Ковалева

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМИ УПРУГИМИ СТЕНКАМИ ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим бесконечно длинные соосные упругие цилиндрические оболочки, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрических оболочек в перемещениях для модели Кирхгофа — Ляве, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_1 от интенсивности деформаций e_1 [1-3]

$$\sigma_1 = Ee_1 - me_1^3. \tag{1}$$

Здесь E — модуль Юнга; m — константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Уравнения динамики физически нелинейных оболочек с учетом (1) записываются в виде

$$\begin{gathered}
\frac{E^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu^{(i)2}}\frac{\partial}{\partial x}\langle[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}+\frac{1}{2}(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x})^2+ \\
+\frac{h_0^{(i)}}{24}(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2})^2-\mu_0^{(i)}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}]\{1-\frac{4}{3}\frac{m^{(i)}}{E^{(i)}}[(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x})^2-\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}+ \\
+(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}})^2]\}\rangle-\rho_0^{(i)}h_0^{(i)}\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2}=-q_x^{(i)}; \\
\frac{E^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu_0^{(i)2}}\langle\frac{h_0^{(i)2}}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}+\frac{U^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2})-\frac{\partial}{\partial x}\{\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}+ \\
+\frac{1}{2}(\frac{U^{(i)}}{\partial x})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x})^2+\frac{h_0^{(i)}}{24}(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2})^2-\mu_0^{(i)}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}]\{1-
\end{gathered}$$

$$
-\frac{4}{3}\frac{m^{(i)}}{E^{(i)}}[(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x})^2-\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}+(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}})^2]\}\}-\frac{1}{R^{(i)}}\{\mu_0^{(i)}[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}+
$$

$$
+\frac{1}{2}(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x})^2+\frac{h_0^{(i)}}{24}(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2})^2]-\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\}\{1+
$$

$$
+\frac{4}{3}\frac{m^{(i)}}{E^{(i)}}[(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x})^2-\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}+(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}})^2]\}\rangle-
$$

$$
-\rho_0^{(i)}h_0^{(i)}\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2}=q_n\,(-1)^{i-1}\,.
$$

Здесь $\mu_0^{(i)}$ — коэффициент Пуассона; $R^{(i)}$ — радиус срединной поверхности оболочки; $\rho_0^{(i)}$ — плотность материала оболочки; $h_0^{(i)}$ — толщины оболочек; $\left(h_0^{(1)}/2=R^{(1)}-R_1,\, h_0^{(2)}/2=R_2-R^{(2)}\right)$; $q_x^{(i)}, q_n$ — напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения.

Волновые процессы в упругих оболочках, не взаимодействующих с вязкой жидкостью, рассмотрены в [1, 2].

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде

$$
\frac{\partial\bar{V}}{\partial t}+\mathrm{grad}\frac{1}{2}V^2+\mathrm{rot}\bar{V}\times\bar{V}+\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\cdot p=-\nu\mathrm{rotrot}\bar{V},\qquad div\bar{V}=0. \tag{2}
$$

Здесь ρ — плотность; p — давление; ν — кинематический коэффициент вязкости. На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости

$$
V_r=-\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t},\ V_x=\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}\quad \text{при}\quad r=R_i-W^{(i)}. \tag{3}
$$

Здесь V_r, V_x — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; t — время; $W^{(i)}$ — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки; $U^{(i)}$ — продольное упругое перемещение оболочек по оси x; R_1 – внутренний радиус внешней оболочки; R_2 — внешний радиус внутренней оболочки ($R_1=R_2+\delta$); δ — толщина слоя жидкости в кольцевом сечении трубы; $i=1$ относится к внешней, а $i=2$ — к внутренней оболочке.

Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочек $\left(W^{(i)}\ll R_i\right)$, то можно считать, что поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$q_x^{(i)} = \left[\rho\nu\left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x}\right)\right]_{r=R_i}, \quad q_n = \left[-p + 2\rho\nu\frac{\partial V_r}{\partial r}\right]_{r=R_i}. \qquad (4)$$

Принимая за характерную длину длину волны l и считая, что соосные оболочки изготовлены из одного материала, то есть, опуская индекс i у E, m, ρ_0, μ_0, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (2)

$$W^{(i)} = w_m u_{30}^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_{10}^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l}t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0\left(1-\mu_0^2\right)}},$$

где c_0– скорость звука в материале оболочки.

Применяя методы возмущений, найдем связь

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi},$$

определим безразмерную скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2$$

и уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi\partial\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{u_m}{l}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{R}{l}\right)^2\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi^4} -$$
$$- \frac{2m}{E\varepsilon}\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\left(1-\mu_0+\mu_0^2\right)\sqrt{1-\mu_0^2}\left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial\xi^2} -$$
$$-6\mu_0^2\frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{\nu}{\delta c_0\varepsilon}\left(\frac{R}{\delta}\right)^2\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial\xi}\right)(-1)^i = 0. \qquad (5)$$

Здесь

$$\xi = x^* - ct^*, \, \tau = \varepsilon t^*, \quad \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1),$$

а ε — малый параметр задачи.

В случае отсутствия жидкости ($\rho = 0$), последние два слагаемых $\partial u_{10}^{(1)}/\partial\xi - \partial u_{10}^{(2)}/\partial\xi$ в уравнениях (6) исчезают и система распадается на два независимых уравнения МКдВ (модифицированные уравнения Кортевега–де Вриза), каждое из которых имеет точное частное решение в виде кинк–антикинк для $\partial u_{10}^{(i)}/\partial\xi$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. 132 с.

2.*Аршинов Г. А.,Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде// РАН Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117

3. *Москвитин В. В.* Сопротивление вызко-упругих материалов. М. : Наука, 1972. 328 с.

УДК 532.5:533.6.011.5

В. С. Кожанов

О ДВУХ РЕЖИМАХ СХЛОПЫВАНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Изучается заключительный (автомодельный) этап схлопывания одномерной сферической полости в идеальной сжимаемой жидкости. Решение строится в предположении, что течение на рассматриваемом этапе не является гомэнтропическим. Проводится сравнение с соответствующими результатами [1], полученными в рамках традиционного подхода, согласно которому течение вплоть до момента фокусировки сохраняет свойство гомэнтропии.

Полная система уравнений, описывающих неустановившиеся одномерные сферически симметричные течения идеального совершенного газа, имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{\rho u}{r} = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial c^2}{\partial r} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{r}\right) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r}, \tag{1}$$

где $\rho = \rho(r,t)$ — плотность, t — время, $u = u(r,t)$ — скорость частицы жидкости, r — координата, γ — показатель адиабаты, $c^2 = c^2(r,t)$ — квадрат скорости звука.

Пусть начальная плотность жидкости распределена в пространстве по степенному закону $\rho_0 = ar^\omega$, $a, \omega = \mathrm{const}$. Соответствующие автомодельные решения имеют вид (α — показатель автомодельности)

$$r = C(-t)^\alpha\xi, \; u = -\alpha C(-t)^{\alpha-1}F(\xi), \; c^2 = \alpha^2C^2(-t)^{2\alpha-2}G(\xi),$$
$$\rho = aC^\omega(-t)^{\alpha\omega}R(\xi), \; C = \mathrm{const}. \tag{2}$$