УДК 531.383:532.516

С. В. Иванов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ СТЕНКОЙ ТРУБЫ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{1}{2}V^2 + \mathrm{rot}\bar{V} \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} grad \cdot p = -\nu \mathrm{rotrot}\bar{V}, \qquad div\bar{V} = 0. \tag{1}$$

Здесь p — давление; ρ — плотность; ν – кинематический коэффициент вязкости. На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости и условия на оси

$$V_r = -\frac{\partial W}{\partial t},\ V_x = \frac{\partial U}{\partial t} \text{ при } r = R_1 - W; \quad V_r, V_x < \infty \text{ при } r = 0. \tag{2}$$

Здесь V_r, V_x — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; t — время; W — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки; U — продольное упругое перемещение оболочек по оси x; R_1 — внутренний радиус оболочки.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа — Ляве, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_1 от интенсивности деформаций e_1 [1-3]

$$\sigma_1 = Ee_1 - me_1^3. \tag{3}$$

Здесь E — модуль Юнга; m — константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Уравнения динамики физически нелинейных оболочек с учетом (3) записываются в виде

$$\frac{Eh_0}{1-\mu}\frac{\partial}{\partial x}\langle[\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial x})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial W}{\partial x})^2+\frac{h_0}{24}(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})^2-\mu_0\frac{W}{R}]\{1-$$
$$-\frac{4}{3}\frac{m}{E}[(\frac{\partial U}{\partial x})^2-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}+(\frac{W}{R})^2]\}\rangle-\rho_0 h_0\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-q_x;$$

$$\frac{Eh_0}{1-\mu_0}\langle\frac{h_0}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{U}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})-\frac{\partial}{\partial x}\{\frac{\partial W}{\partial x}[\frac{\partial U}{\partial x}+$$
$$+\frac{1}{2}(\frac{U}{\partial x})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial W}{\partial x})^2+\frac{h_0}{24}(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})^2-\mu_0\frac{W}{R}]\{1-$$
$$-\frac{4}{3}\frac{m}{E}[(\frac{\partial U}{\partial x})^2-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}+(\frac{W}{R})^2]\}\}-\frac{1}{R}\{\mu_0[\frac{\partial U}{\partial x}+$$
$$+\frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial x})^2+\frac{1}{2}(\frac{\partial W}{\partial x})^2+\frac{h_0}{24}(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})^2]-\frac{W}{R}\}\{1+$$
$$+\frac{4}{3}\frac{m}{E}[(\frac{\partial U}{\partial x})^2-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}+(\frac{W}{R})^2]\}\rangle-\rho_0 h_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=q_n. \qquad (4)$$

Здесь μ_0 – коэффициент Пуассона; R — радиус срединной поверхности оболочки; ρ_0 — плотность материала оболочки; h_0 — толщина оболочки; q_x, q_n — напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения.

Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочек $(W \ll R)$, то можно считать, что поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$q_x=\left[\rho\nu\left(\frac{\partial V_x}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial x}\right)\right]_{r=R}, \quad q_n=\left[-p+2\rho\nu\frac{\partial V_r}{\partial r}\right]_{r=R}. \qquad (5)$$

За характерную длину примем длину волны l, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (4)

$$W=w_m u_{30}, \quad U=u_m u_{10}, \quad t^*=\frac{c_0}{l}t, \quad x^*=\frac{x}{l}, \quad c_0=\sqrt{\frac{E}{\rho_0\left(1-\mu_0^2\right)}},$$

где c_0— скорость звука в материале оболочки.

Применяя методы возмущений, найдем связь

$$\frac{w_m l}{u_m R}u_{30}=\mu_0\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi},$$

определим безразмерную скорость волны

$$c^2=1-\mu_0^2$$

и уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{u_m}{l}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{R}{l}\right)^2\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}-$$
$$-\frac{2m}{E\varepsilon}\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\left(1-\mu_0+\mu_0^2\right)\sqrt{1-\mu_0^2}\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}-$$
$$-2\left[1-(2\mu_0)^2\right]\frac{\rho l\nu}{\rho_0 h_0\varepsilon R_1 c_0}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}=0. \tag{6}$$

Здесь

$$\xi=x^*-ct^*,\ \tau=\varepsilon t^*,\quad \frac{u_m}{l}=\varepsilon=o(1),$$

а ε — малый параметр задачи.

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}=c\varphi,\quad \eta=c_1\xi,\quad t=c_2\tau \tag{7}$$

позволяет записать уравнение (6) в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}-6\sigma_1\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\sigma\varphi=0. \tag{8}$$

Здесь $\sigma=+1$ (при $\mu_0<1/2$ — неорганические материалы), $\sigma=-1$ (при $\mu_0>1/2$ — живые организмы) и $\sigma=0$ (при $\mu_0=1/2$ — резина), а

$$\sigma_1=\frac{2m}{E\varepsilon}\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\left(1-\mu_0+\mu_0^2\right)\frac{c^2c_1}{c_2}.$$

Постоянные c, c_1, c_2 определяются через физические константы задачи и σ.

При отсутствии жидкости ($\rho=0$) последнее слагаемое в уравнении (8)выпадает и оно превращается в модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза, имееющее точное частное решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. 132 с.

2.*Аршинов Г. А.,Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде// РАН. Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117

3. *Москвитин В. В.* Сопротивление вызко-упругих материалов. М. : Наука, 1972. 328 с.