УДК 629.7.072.1

М. К. Иванов

ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТОВ В КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ

В теории управления движением движущихся аппаратов важное место занимает задача определения ориентации аппарата в инерциальной системе координат по его измеренной абсолютной угловой скорости. Ориентацию твердого тела относительно заданной системы координат можно описать с помощью кватерниона — гиперкомплексного числа, компонентами которого являются параметры Эйлера (Родрига-Гамильтона):

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_1 \boldsymbol{i}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{i}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{i}_3, \tag{1}$$

$$\lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2}, \qquad \lambda_i = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\gamma_i, \quad i = 1,2,3, \tag{2}$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — направляющие косинусы оси конечного поворота, φ — угол конечного поворота вокруг этой оси.

Для кватернионов можно ввести операцию умножения таким образом, что в результате произведения двух кватернионов получается кватернион, соответствующий последовательному применению двух поворотов. Таким образом, в кватернионных переменных $\boldsymbol{\lambda}$ формула сложения конечных поворотов имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}_{12} = \boldsymbol{\lambda}_1 \circ \boldsymbol{\lambda}_2. \tag{3}$$

Целый класс алгоритмов определения ориентации можно получить, перейдя от классических кватернионных переменных $\boldsymbol{\lambda}$ к переменным в кососимметрических операторах $\boldsymbol{x}$, которые связаны следующим образом:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1 - ||\boldsymbol{x}|| + 2\boldsymbol{x}}{1 + ||\boldsymbol{x}||}, \tag{4}$$

где $||\boldsymbol{x}|| = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Цель данной работы — получить формулу сложения конечных поворотов в кососимметрических операторах $\boldsymbol{x}$, а так же получить ее приближенные аналоги вместе с оценкой их погрешности.

Получение точной формулы сложения.

Итак, задача состоит в том, чтобы по известным кватернионам $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, соответствующим двум различным поворотам, найти кватернион $\boldsymbol{x}_{12}$, соответствующий сумме этих двух поворотов.

Из формулы (4) можно получить формулу обратного перехода:

$$\boldsymbol{x} = \frac{vect(\boldsymbol{\lambda})}{scal(\boldsymbol{\lambda}) + 1}, \tag{5}$$

где $scal(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0$ — скалярная, $vect(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_1\boldsymbol{i}_1 + \lambda_2\boldsymbol{i}_2 + \lambda_3\boldsymbol{i}_3$ — векторная части кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$.

Теперь, воспользовавшись сначала формулой перехода (4), найдем кватернионы $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$ как функции от $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ соответственно, затем, пользуясь формулой сложения (3), найдем кватернион $\boldsymbol{\lambda}_{12}$, и, наконец, по формуле (5) можно найти искомый кватернион $\boldsymbol{x}_{12}$. Опуская промежуточные вычисления, приведём результат, который можно получить после упрощения выражений:

$$\boldsymbol{x}_{12} = \frac{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{x}_1||\boldsymbol{x}_2|| - \boldsymbol{x}_2||\boldsymbol{x}_1||}{1 + ||\boldsymbol{x}_1|| \cdot ||\boldsymbol{x}_2|| - 2(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2)}. \tag{6}$$

Приближенные варианты формулы сложения.

Формула (6) является довольно громоздкой и неудобной как для теоретических выкладок, так и для программных вычислений.

Будем считать, что рассматриваемые повороты достаточно малы, т.е. углы конечного поворота φ_i имеют малую абсолютную величину. Из соотношений (2) и (5) видно, что при малых углах φ конечного поворота компоненты кватерниона $\boldsymbol{x}$ также малы. Поэтому нашей задачей будет получить приближенные варианты формулы (6) при $|\boldsymbol{x}_1|, |\boldsymbol{x}_2| \to 0$.

Пусть $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ таковы, что их модули меньше некоторой малой фиксированной константы δ:

$$\max(|\boldsymbol{x}_1|, |\boldsymbol{x}_2|) < \delta, \tag{7}$$

где $\delta \ll 1$.

Тогда в числителе выражения (6) стоит сумма пяти величин: $O(\delta)$, $O(\delta)$, $O(\delta^2)$, $O(\delta^3)$, $O(\delta^3)$, а в знаменателе — сумма единицы и двух величин: $O(\delta^4)$ и $O(\delta^2)$. Отсюда следует, что величину знаменателя можно приближенно считать равной единице, а в числителе — оставить только несколько первых слагаемых с наименьшим порядком малости.

Рассмотрим два следующих приближенных выражения, полученных отбрасыванием всех членов, начиная со второго и с третьего порядка соответственно:

$$\boldsymbol{x}_{12} \approx \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{x}_{12} \approx \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2). \tag{9}$$

Оценим формально погрешность, допускаемую приближенными формулами (8) и (9) по сравнению с точным решением (6).

Разложим в точной формуле (6) знаменатель в ряд Тейлора, оставив только член нулевого порядка:

$$\Big(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{x}_1||\boldsymbol{x}_2|| - \boldsymbol{x}_2||\boldsymbol{x}_1||\Big)\cdot$$

$$\cdot\left(1 + O\left(\Big|||\boldsymbol{x}_1|| \cdot ||\boldsymbol{x}_2|| + \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2\Big|\right)\right) =$$

$$= \Big(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{x}_1||\boldsymbol{x}_2|| - \boldsymbol{x}_2||\boldsymbol{x}_1||\Big)\left(1 + O(\delta^2)\right). \qquad (10)$$

Выписывая разность выражения (10) и приближенного решения (8), раскрывая скобки и переходя к оценкам относительно δ, получаем, что определяющим членом является слагаемое $\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$, являющееся величиной $O(\delta^2)$.

Проделывая то же самое с приближенным решением (9), мы получим выражение, в котором останутся только члены третьего и большего порядков малости, т.е. выражение порядка $O(\delta^3)$.

Таким образом, приближенные решения (8) и (9) имеют соответственно второй и третий порядок точности.

Заключение. В данной статье была получена в явном виде (6) формула сложения конечных поворотов в кососимметрических операторах. Так же получены приближенные варианты этой формулы (8) и (9), и исследована аналитическая погрешность, допускаемая этими формулами.

Простота формулы (9) и то, что она обеспечивает третий порядок погрешности, позволяет использовать ее в аналитических выкладках, а так же при разработке алгоритмов определения ориентации, работающих непосредственно в кососимметрических операторах. Кроме того, эта формула может использоваться в бортовых компьютерах, работающих с высокой частотой дискретизации входных данных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и динамика движения. М.: Физматлит, 2006.

2. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. М.: Проспект, 2004.