БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Асимптотика собственных значений и собственных функций системы Дирака с квадратично суммируемым потенциалом // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зимн. шк. 27 янв. – 3 февр. 2012 г.. Саратов : Научная книга, 2012. С. 34–35.

2. *Бурлуцкая М. Ш.* Система Дирака с непрерывным потенциалом и периодическими краевыми условиями // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения – XXIII». Воронеж : Издат.-полиграф. центр Воронеж. гос. ун-та, 2012. С. 34–35.

3. *Хромов А. П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений системы Дирака с периодическими краевыми условиями и непрерывным потенциалом // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения – XXIII». Воронеж : Издат.-полиграф. центр Воронеж. гос. ун-та, 2012. С. 194–196.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫША

Иерархичесие игры — это модели конфликтных ситуаций с неравноправными участниками, в которых важную роль играет информированность первого игрока об интересах второго [1]. Исследованию таких игр при различных вариантах информированности посвящены, в частности, работы [2-5]. В данной статье предполагается, что первый игрок не знает точно функции выигрыша второго, которая влияет и на его интересы. При этих предположениях находится наибольший гарантированный результат первого игрока. Полученная формула применяется для частного случая квадратичных функций выигрыша игроков.

Пусть X, Y — множества стратегий игроков, F_i и G_i, $(i = 1, 2)$ — их функции выигрыша. Таким образом, имеем систему $\Gamma = (X, Y, F_1, F_2, G_1, G_2)$. Рассмотрим иерархическую игру $\tilde{\Gamma} = (\Phi_1, \Psi_2 \times Y, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{G}_1, \tilde{G}_2)$, где $\Phi_1 = \{\phi_1 \mid \phi_1 : Y \to 2^X\}$, $\Psi_2 = \{\psi_2 \mid \psi_2 : 2^X \to X\}$, причем при всех $T \subset X$ выполняется условие $\psi_2(T) \in T$, функции $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$, $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ определяются равенствами $\tilde{F}_i(\phi_1, (\psi_2, y)) = F_i(\psi_2(\phi_1(y)), y)$, $\tilde{G}_i(\phi_1, (\psi_2, y)) = G_i(\psi_2(\phi_1(y)), y)$, $i = 1, 2$.

Информационная интерпретация такого расширения исходной игры и доказательство его оптимальности приведены в [6]. Наибольший гарантированный результат первого игрока в построенной игре $\tilde{\Gamma}$ определяется равенством

$$\gamma = \sup_{\phi_1 \in \Phi_1} \min(\inf_{(\psi_2,y)\in M_1(\phi_1)} \tilde{F}_1(\phi_1,(\psi_2,y)), \inf_{(\psi_2,y)\in M_2(\phi_1)} \tilde{F}_2(\phi_1,(\psi_2,y))),$$

где множества $M_i(\phi_1)$, $i = 1,2$, находятся из соотношений $M_i(\phi_1) = \{(\psi_i', y') \mid \tilde{G}_i(\phi_1,(\psi_2',y')) > \sup_{(\psi_2,y)} \tilde{G}_i(\phi_1,(\psi_2,y)) - \delta_i\}$, $i = 1,2$, где δ_1, δ_2 — некоторые малые положительные числа.

Аналогично выкладкам работы [5] для стохастической информированности первого игрока об интересах второго можно показать, что справедливо равенство

$$\gamma = \sup_{(l_1,l_2)\in L} \min(l_1,l_2),$$

где $L = \{(l_1,l_2) \mid \exists (x_1,y_1),(x_2,y_2)(F_1(x_1,y_1) \geq l_1 \& F_2(x_2,y_2) \geq l_2 \& \forall y \exists x (G_1(x,y)) \leq G_1(x_1,y_1) \& (G_1(x,y) \leq G_1(x_1,y_1) - \delta_1 \vee F_1(x,y) \geq l_1 \& G_2(x,y) \leq G_2(x_2,y_2) \& (G_2(x,y) \leq G_2(x_2,y_2) - \delta_2 \vee F_2(x,y) \geq l_2))\}$. Отсюда нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$\max_{((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in Z^-} \min(F_1(x_1,y_1), F_2(x_2,y_2)) = \gamma^- \leq \gamma, \tag{1}$$

$$\gamma \leq \gamma^+ = \max_{((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in Z^+} \min(F_1(x_1,y_1), F_2(x_2,y_2)), \tag{2}$$

где множества Z^-, Z^+ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} Z^- = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid \forall y \exists x (G_1(x,y) &\leq G_1(x_1,y_1) - \delta_1 \& G_2(x,y) \leq \\ &\leq G_2(x_2,y_2) - \delta_2)\}; \\ Z^+ = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid \forall y \exists x (G_1(x,y) &\leq G_1(x_1,y_1) \& G_2(x,y) \leq \\ &\leq G_2(x_2,y_2))\}. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли пределы $[\gamma^-, \gamma^+]$, в которых лежит γ. Если при $(\delta_1,\delta_2) \to (0,0)$ выполняется условие $\gamma^- \to \gamma^+$ и множества Z^- и Z^+ допускают несложное описание, то задачу вычисления γ можно считать решенной. Эти условия верны для рассматриваемых ниже квадратичных функций выигрыша игроков.

Пусть $X = Y = [0,1]$, $F_i(x,y) = -\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}$, $G_i(x,y) = -\sqrt{(x-c_i)^2 + (y-d_i)^2}$, $i = 1,2$. Введем обозначение $r_i = \sqrt{(x_i-c_i)^2 + (y_i-d_i)^2}$. Тогда геометрический смысл множества Z^+ состоит в том, что на каждой горизонтали $y = const$ квадрата $[0,1]\times[0,1]$ существует точка, лежащая вне или на границе кругов с центрами в точках $E_1(c_1, d_1)$, $E_2(c_2, d_2)$ и радиусами r_1 и r_2 соответственно. Множество Z^- интерпретируется аналогично. В зависимости от соотношений между числами a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, d_1, c_2, d_2 условия принадлежности точек этим множествам преобразуются различным образом. Предположим, например, что выполняются неравенства $c_2 - c_1 > \frac{1}{2}$, $d_1 > d_2$, $c_2 > \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + (c_2 - 2 \cdot c_1)^2}$, $1 - c_1 > \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + (2 \cdot c_2 - 1 - c_1)^2}$, $D_1 + D_2 > D_{12}$, $D_1 + D_{12} > D_2$, $D_2 + D_{12} > D_1$,

$$\frac{c_1}{\cos(\alpha)} \leq \frac{D_1 - D_2 + D_{12}}{2} \leq \min(D_{12} - \frac{1 - c_2}{\cos(\alpha)}, D_1),$$

$$\frac{c_1}{\cos(\alpha)} \leq \frac{D_2 - D_1 + D_{12} + \delta_2 - \delta_1}{2} \leq \min(D_{12} - \frac{1 - c_2}{\cos(\alpha)}, D_1),$$

$$\frac{1 - c_2}{\cos(\alpha)} \leq \frac{D_2 - D_1 + D_{12}}{2} \leq \min(D_{12} - \frac{c_1}{\cos(\alpha)}, D_1),$$

$$\frac{1 - c_2}{\cos(\alpha)} \leq \frac{D_2 - D_1 + D_{12} + \delta_2 - \delta_1}{2} \leq \min(D_{12} - \frac{c_1}{\cos(\alpha)}, D_1),$$

где $D_i = \sqrt{(c_i - a_i)^2 + (d_i - b_i)^2}$, $i = 1, 2$, $D_{12} = \sqrt{(c_2 - c_1)^2 + (d_2 - d_1)^2}$, α — угол между прямой E_1E_2 и осью ординат.

Тогда можно показать, что максимум левой части (1) γ^- достигается в точках $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, где $K_i(x_i, y_i)$ является точкой пересечения круга с центром в точке E_i радиуса $\frac{D_i - D_j + D_{12} - \delta_1 - \delta_2}{2}$ и отрезка H_iE_i $(i, j = 1, 2, i \neq j$, точка H_i имеет координаты $(a_i, b_i))$, а максимум правой части (2) γ^+ достигается в точках $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2)$, где $K'_i(x'_i, y'_i)$ является точкой пересечения круга с центром в точке E_i радиуса $\frac{D_i - D_j + D_{12}}{2}$ и отрезка $H_iE_i (i, j = 1, 2, i \neq j)$.

Величина γ в этом случае лежит в пределах $[-\frac{D_1 + D_2 - D_{12} - \delta_1 - \delta_2}{2}, -\frac{D_1 + D_2 - D_{12}}{2}]$. Таким образом, уменьшая δ_1 и δ_2, мы можем добиться произвольной близости γ к величине $-\frac{D_1 + D_2 - D_{12}}{2}$. Для других соотношений между параметрами задачи выкладки аналогичны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М. : Наука, 1976.

2. *Кукушкин Н. С., Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977.

. 3. *Шолпо И. А.* Об одном классе иерархических игр двух лиц // Вест. МГУ. серюВычислительная математика и кибернетика. 1978. № 4. С. 58–62.

4. *Кононенко А. Ф.* Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // ЖМВ и МФ. 1973. Т. 13, № 2. С. 311–317.

5. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры со случайными факторами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 77–79.

6. *Шолпо И. А.* Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1983.

УДК 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

О БАЗСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В данной статье рассматривается вопрос о базисности Рисса в пространстве $L_2[0,1]$ собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) дифференциального оператора с инволюцией

$$Ly = l[y] = y'(1-x) + q(x)y(x), x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y(0) = y(1), \tag{2}$$

где $q(x) \in L_2[0,1]$.

В случае, когда $q(x) \in C^1[0,1]$, базисность Рисса с.п.ф. оператора (1)—(2) может быть установлена методом из [1]. Значительные трудности, возникающие в случае, когда $q(x) \in L_2[0,1]$ в данной работе преодолеваются с помощью метода статьи [2] нахождения уточненных асимптотических формул для собственных значений системы Дирака. Рассмотрим систему Дирака:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v'(x) + \begin{pmatrix} 0 & -q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix} v(x) = \mu v(x), \tag{3}$$

$$M_0 v(0) + M_1 v(1) = 0, \tag{4}$$

где $q_1(x) = p(x)e^{2i\gamma(x)}$, $q_2(x) = p(x)e^{-2i\gamma(x)}$, $p(x) = \frac{1}{2}(q(x) - q(1-x))$, $\gamma(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x (q(t) + q(1-t))dt$, $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{-2i\gamma} \end{pmatrix}$, $\gamma = \gamma(1)$.

С помощью теоремы 1 из [2] (она легко обобщается и для случая $q_j(x) \in L_2[0,1]$) стандартно получается

Лемма 1. *Собственные значения краевой задачи (3)—(4) достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы*

$$\mu_n = -i(\gamma + n\pi + \mathcal{E}_n) \qquad (n = \pm\, n_0, \pm\, (n_0+1), \dots), \tag{5}$$