Нетрудно показать, что $\Omega'(x) = 0$ и, следовательно, $\Omega(x) \equiv \Omega(0) \equiv I$, $x \in [0, \pi]$. Таким образом, $P_{11}(x, \rho) \equiv I$, $x \in [0, \pi]$. В силу (6) $\varphi(x, \rho) \equiv \equiv \tilde{\varphi}(x, \rho)$, $\Phi(x, \rho) \equiv \tilde{\Phi}(x, \rho)$ и $L = \tilde{L}$. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* О краевых задачах с параметром в краевых условиях // Известия Арм. ССР. Сер. Математика. 1984. Т. 19, № 5. С. 398–409.

2. *Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш.* Определение оператора диффузии по спектральным данным // ДАН Азерб. ССР. 1981. Т. 37, № 2. С. 19–23.

3. *Бутерин С. А., Юрко В. А.* Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на конечном интервале // Вестн. Башкир. ун-та. 2006. № 4. С. 8–12.

4. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: физматлит, 2007. 384 с.

УДК 512.57

Д. А. Бредихин

О ГРУППОИДАХ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения $\subset$. Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной общей алгебры и алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1, 2]. Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются *логическими*. Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Операция называется *диофантовой* [3] (в другой терминологии примитивно-позитивной [4]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции допускают описания с помощью графов см.[3, 4]. Эквациональные и квазиэквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в [5, 6].

Предметом нашего изучения будут алгебры с одной бинарной диофантовой операцией. Рассмотрение бинарных операций над отношениями играет в алгебраической логике предикатов роль, аналогичную роли бинарных булевых функций в пропозициональной логике высказываний. Поэтому естественен интерес к алгебраическим свойствам указанных операций. Одной из важнейших бинарных диофантовых операций над отношениями является операция умножения отношений $\circ$. Алгебры отношений вида $(\Phi, \circ)$ являются полугруппами, и всякая полугруппа допускает изоморфное представление полугруппой бинарных отношений. В общем случае алгебра отношений вида $(\Phi, *)$, где $*$ — некоторая бинарная операция над отношением, образует группоид. Класс всех группоидов не имеет естественных представлений в виде алгебр бинарных отношений, поэтому с точки зрения теории группоидов также представляет интерес рассмотрение группоидов, допускающих такое представление. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в [7, 8].

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ $(R\{\Omega, \subset\})$ класс алгебр (упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Q\{\Omega\}$ $(Q\{\Omega, \subset\})$ — квазимногообразие и $Var\{\Omega\}$ $(Var\{\Omega, \subset\})$ — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ $(R\{\Omega, \subset\})$. Одной из основных задач теории алгебр отношений является характеризация указанных классов алгебр для различных совокупностей операций над отношений. Сосредоточим свое внимание на следующей бинарной операции над бинарными отношениями, определяемой таким образом:

$$\rho * \sigma = \{(x, y) : (\exists z, w)(x, z) \in \rho \wedge (z, w) \in \sigma\}.$$

Упорядоченным группоидом $(A, \cdot, \leq)$ назовем группоид $(A, \cdot)$ с заданным на множестве A отношением порядка $\leq$, согласованным с операцией группоида. Полурешеточно упорядоченный группоид — это алгебра $(A, \cdot, \vee)$ типа $(2, 2)$, где $(A, \cdot)$ — группоид, $(A, \vee)$ — верхняя полурешетка, каноническое отношение порядка которой согласовано с операцией группоида. Элемент 0 называется нулевым элементом группоида, если $0x = x0 = 0$ для любого $x \in A$.

Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах.

Теорема 1. *Квазимногообразие $Q\{*, \subset\}$ является многообразием, то есть $Q\{*, \subset\} = Var\{*, \subset\}$. Упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \subset\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим тождествам:*

$$(xy)x = xy\,(1),\ (xy)x = xy\,(2),\ (xy)^2 = xy\,(3),\ (x^2y)z = (x^2z)y\,(4),$$

$$(x^2y^2)z = x^2(y^2z)\,(5),\ x^2y \leq x^2\,(6),\ x(yz) \leq xy\,(7).$$

Класс $R\{*, \subset\}$ не является квазимногообразием. Упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит классу $R\{*, \subset\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1) – (7) и следующему условию:

$$z \neq 0 \Rightarrow (xy)z = xy\,(8).$$

Теорема 2. *Квазимногообразие $Q\{*\}$ не имеет конечного базиса квазитождеств и не является многообразием. Класс $R\{*\}$ не может быть охарактеризован никакой конечной системой элементарных аксиом и не является квазимногообразием.*

Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1) – (5).

Теорема 3. *Полурешеточно упорядоченный группоид $(A, \cdot, \vee)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \cup\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1) – (5) и тождествам:*

$$x(y \vee z) = xy \vee xz\,(9),\ (x \vee y)z = xz \vee yz\,(10),$$

$$x^2z \vee x^2 = x^2\,(11),\ x(yz) \vee xy = xy\,(12).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. v. 4. P. 73 –89.

2. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. v 18. C. 188–189.

3. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыви операциями // Доклады Российской Академии Наук. 1998. Т. 360. С. 594–595.

4.*Böner P., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations// Contributions to general algebras. 1991. v. 7. P. 50–70.

5. *Бредихин Д. А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. математика. 1993. № 3. С. 23–30.

6. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовами операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.

7. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. v. 54. P. 11–124.

8. *Bredikhin D. A.* Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations// Semigroup Forum. 1992. v. 44. P. 87–192.