УДК 512.57

Д. А. Бредихин, А. В. Попович

О БЕСКОНЕЧНОЙ БАЗИРУЕМОСТИ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую *алгеброй отношений*. Для всякого множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам (упорядоченных отношением включения $\subset$ алгебр) отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) есть многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$). В работах [1, 2] найдены бесконечные базисы тождеств многообразий $Var\{\circ, \nabla\}$ и $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$, где $\circ$ — операция умножения бинарных отношений и ∇-3-унарная операция идентификации неподвижной точки, определяемая следующим образом:

$$\nabla(\rho) = \{(x, x) : (\exists z)(z, z) \in \rho\}.$$

Теорема 1 (см. [1]). *Алгебра $(A, \cdot, ^*)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам: $(xy)z = x(yz)$ (1), $(x^*)^2 = x^*$ (2), $xy^* = y^*x$ (3), $(xy)^* = (yx)^*$ (4), $(xy^*)^* = x^*y^*$ (5), $x^*(x^k)^* = x^*$ (6) для любого простого числа k.*

Теорема 2 (см. [2]). *Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, ^*, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1) – (6) и тождеству $xy^* \leq x$ (7).*

Основной результат работы формулируется в следующей теореме.

Теорема 3. *Многообразия $Var\{\circ, \nabla\}$ и $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$ не являются конечно базируемыми, то есть они не могут быть охарактеризованы никакой конечной системой тождеств.*

Доказательство. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении. Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $G = (V, E)$, где $V = V(G)$ – конечное множество, называемое множеством вершин, и $E = E(G) \subset V \times N \times V$ – тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u\cdot \xrightarrow{k} \cdot v$. Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, то есть систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V,E) – помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ — две выделенные вершины (не обязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Двухполюсник определяет операцию над бинарными отношениями (см. [1]). Двухполюсники $G_\circ = (V_\circ, E_\circ, in_\circ, out_\circ)$ и $G_\nabla = (V_\nabla, E_\nabla, in_\nabla, out_\nabla)$, соответствующие операции умножения отношений $\circ$ и операции ∇, задаются следующим образом: $V_\circ = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E_\circ = \{(v_1, 1, v_2), (v_2, 2, v_3)\}$, $in_\circ = v_1, out_\circ = v_3$ и $V_\nabla = \{v_0, v_1\}$, $E_\nabla = \{(v_1, 1, v_1)\}$, $in_\nabla = out_\nabla = v_0$.

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ – двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \ldots, G_m)$,определяемый следующим образом: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k, отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v.

Обозначим через pr(E) множество всех вершин помеченного графа, которые инцендентны хотя бы одному ребру. Пусть даны два помеченных графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. $f : pr(E_2) \to$ $\to pr(E_1)$ называется гомоморфизмом G_2 в G_1, если $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in$ $\in E_2$. Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ – двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$. Мы будем писать $E_1 \prec E_2$ $(G_1 \prec G_2)$, если существует гомоморфизм из E_2 в E_1 (из G_2 в G_1), и $E_1 \cong E_2$ $(G_1 \cong G_2)$, если $E_1 \prec E_2$ и $E_2 \prec E_1$ $(G_1 \prec G_2$ и $G_2 \prec G_1)$.

Обозначим через Σ эквациональную теорию алгебр типа $(2,1)$, удовлетворяющих тождествам (1)–(6), и пусть Ξ – множество термов алгебры $(A, \cdot, ^*)$ типа $(2,1)$. Для термов p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \cong p_2$, когда тождество $p_1 = p_2$ принадлежит Σ. Пусть Λ – множество всех непустых слов над алфавитом $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, $\odot$ – пустое слово и $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\odot\}$.

Лемма 1 (см. [1]). *Для любого терма p существуют такие $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n \geq 0)$, что $p \cong \alpha_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*$, где $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$.*

Сопоставим терму p двухполюсник $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$, который строится следующим образом (см. [1]).

Пусть $p = \alpha = \odot$. Тогда $V_p = V_\alpha = \{v_0\}$, $E_p = E_\alpha = \emptyset$ и $in(p) =$ $= in(\alpha) = out(p) = out(\alpha) = v_0$. Пусть $p = \alpha = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$. Тогда $V_p =$ $= V_\alpha = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$, $E_p = E_\alpha = \{(v_k, i_k, v_{k+1}) : k \in [1, n]\}$ и $in(p) =$ $= in(\alpha) = v_1$, $out(p) = out(\alpha) = v_{n+1}$:

$$in(\alpha) = v_1 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \dots \cdot \xrightarrow{i_n} \cdot v_{n+1} = out(\alpha).$$

Пусть $p = \alpha^*$, где $\alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$. Тогда $V_p = V_{\alpha^*} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, $E_p = E_{\alpha^*} = \{(v_k, i_k, v_{k+1}) : k \in [1, n-1]\} \cup \{(v_n, i_n, v_1)\}$ и $in(p) = out(p) = $ $= in(\alpha^*) = out(\alpha^*) = v_0$. Заметим, что E_{α^*} есть петля, которая получена из E_α посредством отождествления вершин v_1 и v_{n+1}.

Пусть $p = \alpha_0(\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^*$ и $n > 0$. Мы будем предполагать, что множества $V_{\alpha_0}, V_{\alpha_1^*} \dots, V_{\alpha_n^*}$ попарно не пересекаются. Тогда $V_p = V_{\alpha_0} \cup$ $\cup pr(E_{\alpha_1^*}) \cup \dots \cup pr(E_{\alpha_n^*})$, $E_p = E_{\alpha_0} \cup E_{\alpha_1^*} \cup \dots \cup E_{\alpha_n^*}$ и $in(p) = in(\alpha_0)$, $out(p) = out(\alpha_0)$.

Обозначим через $\mid V \mid$ число элементов конечного множества V.

Лемма 2 (см. [1]). *Пусть $E_{\alpha^*} \prec E_{\beta^*}$ и f – гомоморфизм из E_{β^*} в E_{α^*}. Тогда существуют такие $\lambda, \mu \in \tilde{\Lambda}$, что $\alpha = \lambda\mu$ и $\beta = (\mu\lambda)^k$ для некоторого натурального $k \geq 1$, и для каждой вершины $v \in pr(E_{\alpha^*})$ выполняется условие $\mid f^{-1}(v) \mid = k$.*

Пусть Θ – множество всех двухполюсников $G(p)$, где $p = $ $= \alpha_0(\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^*$ для некоторого $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$. Определим две операции на Θ типа 2 и 1 как следующую композицию графов. Для заданных $G, Q \in \Theta$ положим $G \cdot Q = G_\circ(G, Q)$ и $G^* = G_\nabla(G)$, где $G_\circ$ и G_∇ – двухполюсники, соответствующие операциям $\circ$ и ∇ над отношениями.

Будем писать $G \overset{k}{\prec} Q$ $(k \geq 2)$, если существует гомоморфизм f из Q в G, удовлетворяющий условию: для любой вершины v из G $\mid f^{-1}(v) \mid \leq k$. Далее, будем писать $G \overset{K}{\prec} Q$, если $G = G_1 \overset{k}{\prec} G_2 \overset{k}{\prec} \dots \overset{k}{\prec} G_n = Q$ для некоторых $G_1, G_2, \dots, G_n \in \Theta$, и $G \overset{K}{\cong} Q$, если $G \overset{K}{\prec} Q$ и $Q \overset{K}{\prec} G$. Легко проверить, что отношение $\overset{K}{\cong}$ является конгруэнтностью алгебры $(\Theta, \cdot, ^*)$ и фактор алгебра $A_k = (\Theta, \cdot, ^*)/ \overset{K}{\cong}$ удовлетворяет тождествам (1)-(5), а фактор система $A_k^{\leq} = (\Theta, \cdot, ^*, \overset{K}{\prec})/ \overset{K}{\cong}$ является упорядоченной алгеброй, которая удовлетворяет тождествам (1)-(5) и (7).

Обозначим Pr множество всех простых чисел, $Pr[1, n] = PR \cap [1, n]$ и $Pr(n)$ - множество всех простых делителей n.

Лемма 3 . *Если $G(\alpha^*) \overset{K}{\prec} G((\alpha^l)^*)$, то $Pr(l) \subset Pr[1, k]$.*

Предположим, что $G(\alpha^*) \overset{K}{\prec} G((\alpha^l)^*)$, то есть $G(\alpha^*) = G_1 \overset{k}{\prec} G_2 \overset{k}{\prec} \dots \overset{k}{\prec}$ $G_{n-1} \overset{k}{\prec} G_n = G((\alpha^l)^*)$ для некоторых $G_1, G_2, \dots, G_{n-1}, G_n \in \Theta$, и f_i – соответствующий гомоморфизм из G_i в G_{i-1} $(i = 2, \dots, n)$.

Положим $\tilde{G}_{n-1} = f_n(G_n), \tilde{G}_{n-2} = f_{n-1}(\tilde{G}_{n-1}), \dots, \tilde{G}_1 = f_2(\tilde{G}_2)$.

Легко видеть, что $G(\alpha^*) \overset{k}{\prec} \tilde{G}_1 \overset{k}{\prec} \tilde{G}_2 \overset{k}{\prec} \ldots \overset{k}{\prec} \tilde{G}_{n-1} \overset{k}{\prec} G_n = G((\alpha^l)^*)$. Пусть f – композиция гомоморфизмов $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_2$. Согласно лемме 2 имеем $f_i^{-1}(v) = k_i \leq k$ для всякой вершины $v \in V(\tilde{G}_{i-1})$ такой. что $v \neq in(\tilde{G}_{i-1}) = out(\tilde{G}_{i-1})$. Отсюда следует, что $f^{-1}(v) = k_2 k_3 \ldots k_n$ для всякой вершины $v \in V(G(\alpha^*))$ такой, что $v \neq in(G(\alpha^*)) = out(G(\alpha^*))$. Таким образом, согласно лемме 2 имеем $l = k_2 k_3 \ldots k_n$, следовательно, $Pr(l) \subset Pr[1,k]$. *Лемма 3 доказана.*

Пусть l – простое число такое, что $l \notin Pr[1,k]$. Предположим, что $G(\alpha^*) \circ G((\alpha^*)^l \overset{K}{\cong} G(\alpha^*)$, тогда $G(\alpha^*) \overset{K}{\prec} G((\alpha^*)^l)$, следовательно, по лемме 3 $l \in Pr[1,k]$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, система тождеств (1)-(6) ((1)-(6) и (7)) не эквивалентна никакой своей подсистеме, следовательно, многообразие $Var\{\circ, \nabla\}$ ($Var\{\circ, \nabla, \subset\}$) не является конечно базируемым. *Теорема 3 доказана.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с операцией идентификации неподвижной точки// Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвузов. сб. науч. тр.. 2010. С. 90–98

2. *Бредихин Д. А., Попович А. В.* Об упорядоченных полугруппах отношений с операцией идентификации неподвижной точки// Вестник Саратовского технического университета. 2011. №4. вып. 1. С. 52–56.

УДК 514.764

А. В. Букушева

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ФИНСЛЕРОВОЙ СТРУКТУРОЙ

В статье исследуются специальные классы распределений с финслеровой структурой [1]. В соответствии с уже ставшим классическим подходом к изучению собственно финслеровых пространств (фундаментальная функция задана на всем касательном расслоении финслерова пространства), от финслерова многообразия переходят к его касательному расслоению с метрикой Сасаки – Финслера [2]. В случае субфинслерова пространства [3] вместо касательного расслоения удобно использовать его подрасслоение — распределение с финслеровой структурой. Существенным отличием использования подрасслоения является нечетность размерности многообразия, на котором осуществляются основные построения. В этом случае на распределении с финслеровой структурой естественно определить почти контактную метрическую структуру — аналог структуры многообразия с метрикой Сасаки – Финслера [4].