Легко видеть, что $G(\alpha^*) \overset{k}{\prec} \tilde{G}_1 \overset{k}{\prec} \tilde{G}_2 \overset{k}{\prec} \ldots \overset{k}{\prec} \tilde{G}_{n-1} \overset{k}{\prec} G_n = G((\alpha^l)^*)$. Пусть f – композиция гомоморфизмов $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_2$. Согласно лемме 2 имеем $f_i^{-1}(v) = k_i \leq k$ для всякой вершины $v \in V(\tilde{G}_{i-1})$ такой. что $v \neq in(\tilde{G}_{i-1}) = out(\tilde{G}_{i-1})$. Отсюда следует, что $f^{-1}(v) = k_2k_3 \ldots k_n$ для всякой вершины $v \in V(G(\alpha^*))$ такой, что $v \neq in(G(\alpha^*)) = out(G(\alpha^*))$. Таким образом, согласно лемме 2 имеем $l = k_2k_3 \ldots k_n$, следовательно, $Pr(l) \subset Pr[1,k]$. *Лемма 3 доказана.*

Пусть l – простое число такое, что $l \notin Pr[1,k]$. Предположим, что $G(\alpha^*) \circ G((\alpha^*)^l \overset{K}{\cong} G(\alpha^*)$, тогда $G(\alpha^*) \overset{K}{\prec} G((\alpha^*)^l)$, следовательно, по лемме 3 $l \in Pr[1,k]$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, система тождеств (1)-(6) ((1)-(6) и (7)) не эквивалентна никакой своей подсистеме, следовательно, многообразие $Var\{\circ, \nabla\}$ ($Var\{\circ, \nabla, \subset\}$) не является конечно базируемым. *Теорема 3 доказана.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с операцией идентификации неподвижной точки// Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвузов. сб. науч. тр.. 2010. С. 90–98

2. *Бредихин Д. А., Попович А. В.* Об упорядоченных полугруппах отношений с операцией идентификации неподвижной точки// Вестник Саратовского технического университета. 2011. №4. вып. 1. С. 52–56.

УДК 514.764

А. В. Букушева

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ФИНСЛЕРОВОЙ СТРУКТУРОЙ

В статье исследуются специальные классы распределений с финслеровой структурой [1]. В соответствии с уже ставшим классическим подходом к изучению собственно финслеровых пространств (фундаментальная функция задана на всем касательном расслоении финслерова пространства), от финслерова многообразия переходят к его касательному расслоению с метрикой Сасаки – Финслера [2]. В случае субфинслерова пространства [3] вместо касательного расслоения удобно использовать его подрасслоение — распределение с финслеровой структурой. Существенным отличием использования подрасслоения является нечетность размерности многообразия, на котором осуществляются основные построения. В этом случае на распределении с финслеровой структурой естественно определить почти контактную метрическую структуру — аналог структуры многообразия с метрикой Сасаки – Финслера [4].

Пусть X —гладкое многообразие нечетной размерности n, $\Xi(X)$– $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на X. Рассмотрим на многообразии X четверку $(D, \eta, \vec{\xi}, D^\perp)$, где D —гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = Span(\vec{\xi})$ — его оснащение. Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n)$ $(a, b, c, e = 1, ..., n-1)$ на многообразии X будем называть адаптированной к неголономному многообразию D, если $D^\perp = Span(\frac{\partial}{\partial x^n})$.

На многообразии X имеем неголономное поле базисов $(\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением исключительно адаптированных координат с условием $\vec{\xi} = \partial_n$ (см. [1]). Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой.

Предположим, что задана связность над распределением D (см. [1]), т.е. распределение $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$ разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^\alpha, x^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\epsilon}_a)$, где $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$ (см. [1]). Внутренняя линейная связность определяет связность над распределением, если положить $G^a_b(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^\alpha) x^{n+c}$. Для координатного представления объектов, заданных на D, мы используем координаты на многообразии D, индуцируемые адаптированной картой (см. [1]).

Проводя необходимые вычисления, получаем

$$[\vec{\epsilon}_a,\, \vec{\epsilon}_b] = 2\omega_{ba}\, \partial_n + R^c_{ab}\, \partial_{n+c}, [\vec{\epsilon}_a,\, \partial_n] = \partial_n G^b_a \partial_{n+b}, [\vec{\epsilon}_a,\, \partial_{n+b}] = G^c_{ab} \partial_{n+c}, \quad (1)$$

где $R^c_{ba} = \vec{\epsilon}_b G^c_a - \vec{\epsilon}_a G^c_b$ и $\partial_n G^a_b$ соответственно первый и второй тензоры кривизны Схоутена [5].

Предположим, что на многообразии D задана функция $L(x^\alpha,\, x^{n+a})$ такая, что выполняются следующие условия:

1. L – гладкая положительная функция на $D^0 = D \backslash \vec{0}$;

2. L – положительно однородна степени 1 относительно слоевых координат;

3. Квадратичная форма $L^2_{\cdot a \cdot b} \xi^a \xi^b = \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a} \partial x^{n+b}} \xi^a \xi^b$ положительно определена.

Распределение D^0 будем обозначать символом D. Назовем функцию $L(x^\alpha,\, x^{n+a})$ допустимой финслеровой метрикой, а пару $(D,\, L)$ – распределением с финслеровой структурой или фиснлеровым распределением. Как было показано в (см. [1]), с каждым распределением (D, L) ассоциируются некоторая внутренняя и соответствующая ей продолженная связности. Для задания внутренней и продолженной связностей необходимо задать объект внутренней связности $G^a_b(x^\alpha,\, x^{n+a})$, а — задать разложение $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$.

Если на многообразии X задана пара $(D,\, L)$, то в D возникает внутренняя связность, порождаемая распределением $HD = Span(\vec{\epsilon}_a)$, где $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}$, $G^a_{bc} = G^a_{\cdot\, b\, \cdot\, c} = \partial_{n+b}\partial_{n+c} G^a$, $G^a = g^{ab}(\partial_c L^2_{\cdot b} x^{n+c} - \vec{e}_b L^2)$, $g_{ab} = \frac{1}{2} L^2_{\cdot a \cdot b}$ (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть (D, L) — распределение с финслеровой структурой и $(\tilde{D}, \tilde{\eta}, \tilde{g}, \partial_n)$ – соответствующая почти контактная метрическая структура, тогда ненулевые коэффициенты связности Леви-Чивита метрики $\tilde{g}$ представимы в следующем виде:*

$$\begin{aligned}
&a)\ \Gamma^c_{ab} = F^c_{ab}, \Gamma^{n+c}_{ab} = (-C^c_{ab} + \tfrac{1}{2} R^c_{ab}),\\
&b)\ \Gamma^c_{n+a\, n+b} = -\tfrac{1}{2} g_{ab|d} g^{dc}, \Gamma^{n+c}_{n+a\, n+b} = C^c_{ab},\\
&c)\ \Gamma^c_{a\, n+b} = (C^c_{ba} + \tfrac{1}{2} g^{cd} R^e_{da} g_{eb}), \Gamma^{n+c}_{a\, n+b} = \tfrac{1}{2} g^{cd}(\vec{\epsilon}_a g_{bd}),\\
&d)\ \Gamma^c_{n+a\, b} = (\tfrac{1}{2} g^{cd}(\partial_{n+a} g_{bd}) - \tfrac{1}{2} g^{cd} R^e_{bd} g_{ea}), \Gamma^{n+c}_{n+a\, b} = \tfrac{1}{2} g^{cd} g_{da|b},\\
&e)\ \Gamma^c_{na} = \tfrac{1}{2} g^{cb}(\partial_n g_{ab} - 2\omega_{ab}), \Gamma^{n+c}_{na} = -\Gamma^{n+c}_{an} = -\tfrac{1}{2} \partial_n G^c_a,\\
&\Gamma^c_{an} = \tfrac{1}{2} g^{cb}(\partial_n g_{ab} + 2\omega_{ab}),\\
&f)\ \Gamma^c_{n\, n+a} = \Gamma^c_{n+a\, a} = \tfrac{1}{2} g^{cd}(\partial_n G^b_d) g_{ba}, \Gamma^{n+c}_{n\, n+a} = \Gamma^c_{n+a\, a} = \tfrac{1}{2} g^{cd}(\partial_n g_{ad}),
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
&a)\ F^c_{ab} = \tfrac{1}{2} g^{cd}(\vec{\epsilon}_a g_{bd} + \vec{\epsilon}_b g_{da} - \vec{\epsilon}_d g_{ab}),\\
&b)\ C^c_{ab} = \tfrac{1}{2} g^{cd}(\partial_{n+d} g_{ab}),\\
&c)\ g_{ab|d} = \vec{\epsilon}_d g_{ab} - G^k_{bd} g_{ka} - G^k_{da} g_{kb}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Связность Леви — Чивита $\widetilde{\nabla}$ определяется по формулам

$$2\tilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\vec{X}} \vec{Y}, \vec{Z}) = \vec{X}(\tilde{g}(\vec{Y}, \vec{Z})) + \vec{Y}(\tilde{g}(\vec{Z}, \vec{X})) - \vec{Z}(\tilde{g}(\vec{X}, \vec{Y})) +$$

$$+\tilde{g}([\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z}) - \tilde{g}([\vec{Y}, \vec{Z}], \vec{X}) + \tilde{g}([\vec{Z}, \vec{X}], \vec{Y}), \tag{4}$$

$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \Gamma\,(TD)$. Прямым вычислением, используя (1), (4), получим

$$\tilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\vec{\epsilon}_a} \vec{\epsilon}_b, \vec{\epsilon}_d) = \frac{1}{2}(\vec{\epsilon}_a g_{bd} + \vec{\epsilon}_b g_{da} - \vec{\epsilon}_d g_{ab}), \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\vec{\epsilon}_a} \vec{\epsilon}_b, \partial_{n+d}) = \frac{1}{2}(-\partial_{n+d} g_{ab} + R^c_{ab} g_{cd}).$$

Из (3a) и (3b), следует (2a). Аналогично получаются (2b-2f). □

Назовем (D, L) распределением Ландсберга, если выполняется равенство $F^a_{bc} = G^a_{bc}$ и распределением Бервальда, если $G^a_{bc \cdot d} = 0$. На многообразии D определим два эндоморфизма h и j следующим образом:

$h(\vec{x}_u) =^h (P \circ \pi_*)(\vec{x}_u)$; $j(\vec{x}_u) =^v (P \circ \pi_*)(\vec{x}_u)$, где $\vec{u} \in D_x$, $\vec{x}_u \in T_u(D)$. Имеет место

Теорема 2. *На пространстве распределения с финслеровой метрикой существует и при том единственная внутренняя связность* ∇, *удовлетворяющая условию* $\nabla h = \nabla j = 0$.

Доказательство теоремы сводится к непосредственному вычислению коэффициентов связности ∇. Прямым вычислением проверяется, что ненулевые компоненты тензора кривизны связности ∇ как и в голономном случае распадаются на три блока R, S, P, соответствующие в классическом случае первому, второму и третьему тензорам кривизны Картана соответственно. Назовем полученные тензоры тензорами кривизны типа Картана. Таким образом, заключаем, что справедливы следующие теоремы:

Теорема 3. *Финслерово распределение* (D, L) *есть распределение Ландсберга, если ее третий тензор кривизны типа Картана равен нулю.*

Теорема 4. *Всякое пространство Бервальда является пространством Ландсберга.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Галаев С. В.* О продолжении внутренней связности неголономного многообразия с финслеровой метрикой // Механика. Математика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 25–28.

2. *Bejancu A., Farran H. R.* Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle // Reports on Mathematical Physics. 2006. Vol. 58, № 1. P. 131–146.

3. *Clelland J. N., Moseley C. G.* Sub-Finsler geometry in dimension three // Differential Geometry and its Applications. 2006. Vol. 24, № 6. P. 628–651.

4. *Букушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П.* О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Механика. Математика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 10–14.

5. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

6. *Reinhart B. L.* Foliated manifolds with bundle-fike metric // Annals of Math. 1959. Vol. 69, № 2. P. 119–132.