УДК 514.133

Л.Н. Ромакина

ИНВАРИАНТ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ ЭКВИДИСТАНТЫ РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Введено особое гиперболическое расстояние Ω между точками изотропных прямых расширенной гиперболической плоскости H^2. Выделена подгруппа G^h группы движений плоскости H^2, относительно которой инвариантно расстояние Ω. Показано, что подгруппа G^h является группой симметрий эквидистанты плоскости H^2.

Пусть абсолют расширенной гиперболической плоскости H^2 в каноническом репере R задан уравнением

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0, \tag{1}$$

тогда матрица преобразований фундаментальной группы G плоскости H^2 в репере R имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b & 2\varepsilon\sqrt{ab} \\ c & d & 2\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{cd} \\ \varepsilon_1\sqrt{ac} & \varepsilon_2\sqrt{bd} & \varepsilon\varepsilon_1\sqrt{bc}+\varepsilon\varepsilon_2\sqrt{ad} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\Delta = \varepsilon\varepsilon_2\sqrt{ad} - \varepsilon\varepsilon_1\sqrt{bc} \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, a, b, c, d — неотрицательные действительные числа.

Каждой паре точек A и B плоскости H^2, заданных в репере R вещественными координатами $A(a_i)$, $B(b_i)$, $i = 1, 2, 3$, где $a_1b_2+a_2b_1-a_3b_3 < 0$, поставим в соответствие тройку чисел:

$$\left(\left|\frac{b_1}{\sqrt{b_3^2-b_1b_2}} - \frac{a_1}{\sqrt{a_3^2-a_1a_2}}\right|;\right.$$
$$\left.\left|\frac{b_2}{\sqrt{b_3^2-b_1b_2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_3^2-a_1a_2}}\right|;\left|\frac{b_3}{\sqrt{b_3^2-b_1b_2}} - \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2-a_1a_2}}\right|\right), \tag{3}$$

которую назовем *координатами пары* A, B *в репере* R.

Лемма. *Пара точек A, B плоскости H^2 определяет изотропную прямую тогда и только тогда, когда в каждом каноническом репере ее координаты $(x; y; z)$ (3) удовлетворяют условию: $xy = z^2$.*

Применяя лемму, найдем значение Ψ_{AB} тангенциальной метрической квадратичной формы $\Psi(X) = 4X_1X_2 - X_3^2$ плоскости H^2, соответствующей заданию абсолюта (1), от координат (3) пары точек A, B изотропной прямой:

$$\Psi_{AB} = \frac{3\left(b_3\sqrt{a_3^2-a_1a_2} - a_3\sqrt{b_3^2-b_1b_2}\right)^2}{(a_3^2-a_1a_2)\,(b_3^2-b_1b_2)}. \tag{4}$$

Число $\Omega_{AB}=\sqrt{\frac{1}{3}\Psi_{AB}}$ назовем *особым гиперболическим расстоянием между точками A и B изотропной прямой плоскости H^2*. Согласно равенству (4)

$$\Omega_{AB}=\left|\frac{b_3}{\sqrt{b_3^2-b_1b_2}}-\frac{a_3}{\sqrt{a_3^2-a_1a_2}}\right|. \tag{5}$$

С учетом формулы (5.6) [1, с. 287] в репере $R=\{A_1,A_2,A_3,E\}$ равенство (5) можно записать в виде

$$\Omega_{AB}=\big|f_c\big(BA_3\big)-f_c\big(AA_3\big)\big|, \tag{6}$$

где f_c — соответственно типу прямой $AA_3(BA_3)$ эллиптический или гиперболический косинус расстояния $AA_3(BA_3)$.

Теорема. *Преобразование H из фундаментальной группы G плоскости H^2 сохраняет без изменения особое гиперболическое расстояние Ω между точками изотропных прямых тогда и только тогда, когда коэффициенты матрицы (2) преобразования H удовлетворяют условиям: $b=c=0$ или $a=d=0$.*

Все преобразования группы G, относительно которых инвариантно особое гиперболическое расстояние Ω между точками изотропных прямых, образуют группу (обозначим ее G^h). Согласно теореме в репере R каждое преобразование группы G^h может быть задано одной из следующих матриц:

$$C_1:\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & d & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\sqrt{ad}\end{pmatrix}, C_2:\begin{pmatrix} 0 & b & 0\\ c & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\sqrt{bc}\end{pmatrix}, ad\neq 0, bc\neq 0, \varepsilon=\pm 1. \tag{7}$$

Матрица C_1 в соответствии с терминологией [2] определяет на плоскости H^2 отражение от прямой $(a=d,\varepsilon=-1)$, сдвиг вдоль прямой $(a\neq d,\varepsilon=1)$ и скользящее отражение $(a\neq d,\varepsilon=-1)$. Матрица C_2 — отражение от прямой $(\varepsilon=1)$ и поворот вокруг внутренней относительно абсолюта точки $(\varepsilon=-1)$.

В каждом преобразовании группы G^h инвариантна гиперболическая прямая (A_1A_2) плоскости H^2 и ее полюс $(A_3(0:0:1))$ относительно абсолютной квадрики (1). И, обратно, каждое преобразование группы G, относительно которого инвариантна прямая A_1A_2, задано одной из матриц (7). Прямая A_1A_2 однозначно определяет пучок эквидистантных конических сечений с базой A_1A_2 $\big(x_3^2-kx_1x_2=0, k<1\big)$, иваринтных относительно преобразований группы G^h. Таким образом, группа G^h является группой симметрий эквидистанты плоскости H^2.

Группа G^h как подгруппа группы проективных преобразований проективной плоскости P^2 определяет геометрию плоскости $P^2 \setminus T_3$ с вырожденным кубическим абсолютом T_3, состоящим из овальной линии и пересекающей ее действительной прямой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розенфельд Б.А., Замаховский М.П.* Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. М.: МЦНМО, 2003. 560 с.

2. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит. 1955. 744 с.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов

О ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \tag{1}$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными полураспадающимися краевыми условиями специальной структуры:

$$\begin{aligned} U_i(y,\lambda) &:= \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0, \; i=\overline{1,l}, \\ U_i(y,\lambda) &:= \sum_{s+k\le\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k\le\varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, \; i=\overline{l+1,n}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $n-l \le l < n$.

Пусть корни $\{\omega_j\}_1^n$ характеристического уравнения

$$\sum_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$$

различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n. \tag{3}$$

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует m-кратная $(1 \le m \le n)$ полнота