5. *Galaev S. V.* Contact structures with admissible Finsler metrics Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of International Meeting (Edited by M. C. Duffy, V. O. Gladyshev, A. N. Morozov, P. Rowlands), Moscow, 4 - 7 July 2011. Moscow : BMSTU, 2012. P. 80–87.

6. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М. : МПГУ, 2003.

УДК 517.54

В. Г. Гордиенко, К. А. Пилясова

О ЛОКАЛЬНО ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИИ ПИКА

Обозначим через S^M, $M > 1$, класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : \ |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < M, \ z \in E$.

В настоящей статье устанавливается свойство граничной поверхности $\partial V_5(M)$ множества значений $V_5(M) = \{(a_2, a_3, a_4, Re\, a_5) : \ f \in S^M\}$ в окрестности точки $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$, достовляемой симметризованной функцией Пика

$$P_{M^4}(z) = \sqrt{\frac{2z^2}{M^4(M^2(1+z^4) + \sqrt{(1+z^4)^2 - 4z^4})}}, \quad z \in E.$$

Следующая теорема развивает и дополняет результат работ [1],[2,],[3].
Теорема. *Точка* $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ *граничной поверхности* $\partial V_5(M)$*, доставляемая функцией* $P_{M^4}(z)$*, вдоль направления* $Im\, a_3$ *имеет угловой характер.*

Доказательство теоремы.

Функции $f \in S^M$, доставляющие точки граничной поверхности $\partial V_5(M)$ отображают E на круг радиуса M с не более чем четырьмя кусочно аналитическими разрезами. Известно [4], что все такие функции можно представить в виде $f(z) = Mw(z, \log M)$, где

$$w(z, t) = e^{-t}(z + a_2(t) z^2 + \ldots) \tag{2}$$

является интегралом обобщённого дифференциального уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad 0 \le t \le \log M, \tag{3}$$

с непрерывными функциями $u_k = u_k(t)$, $k = 1, \ldots, 4$, и постоянными числами $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, 4$, $\sum\limits_{k=1}^{4} \lambda_k = 1$. Кроме того, управляющие функции u_k удовлетворяют необходимым условиям оптимальности скользящего режима. Пусть $a_k(t)$, $k \leq 5$, определяются разложением (2). Совершим замену переменной $t \to 1 - e^{-t}$ и обозначим $a_k(t) = x_{2k-3}(t) + ix_{2k-2}(t)$, $k = 2, \ldots, 5$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в равенстве (3), после произведённой замены получим управляемую систему дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение относительно $\dot{x}_4(t)$ этой системы

$$\dot{x}_4(t) = 2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k[2(x_1 \sin u_k - x_2 \cos u_k) + (1-t)\sin 2u_k], \quad x_4(0) = 0, \quad (4)$$

$0 \leq t \leq 1 - 1/M$.

Следуя принципам оптимизационного формализма, введём вектор множителей Лагранжа $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_7)^T$ и запишем функцию Гамильтона

$$\begin{aligned}
&H(t,x,\Psi,u,\lambda) = -2\sum_{k=1}^{4}\lambda_k[\cos u_k \Psi_1 - \sin u_k \Psi_2 + (2(x_1 \cos u_k + \\
&+x_2 \sin u_k) + (1-t)\cos 2u_k)\Psi_3 - (2(x_1 \sin u_k - x_2 \cos u_k) + (1- \\
&-t)\sin 2u_k)\Psi_4 + ((2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos u_k + 2(x_4 + x_1x_2)\sin u_k + 3(1- \\
&-t)(x_1 \cos 2u_k + x_2 \sin 2u_k) + (1-t)^2 \cos 3u_k)\Psi_5 - ((2x_3 + x_1^2 - \\
&-x_2^2)\sin u_k - 2(x_4 + x_1x_2)\cos u_k - 3(1-t)(x_2 \cos 2u_k - x_1 \sin 2u_k) + \\
&+(1-t)^2 \sin 3u_k)\Psi_6 + (2((x_5 + x_1x_3 - x_2x_4)\cos u_k + (x_6 + x_1x_4 + \\
&+x_2x_3)\sin u_k) + 3(1-t)((x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos 2u_k + (x_4 + \\
&+2x_1x_2)\sin 2u_k) + 4(1-t)^2(x_1 \cos 3u_k + x_2 \sin 3u_k) + \\
&+(1-t)^3 \cos 4u_k)\Psi_7], \qquad (5)
\end{aligned}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, 4$, $\sum\limits_{k=1}^{4}\lambda_k = 1$, $x = (x_1, \ldots, x_7)^T$ удовлетворяет системе (4), а $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_7)^T$, $\Psi_7 = 1$, удовлетворяет сопряжённой системе дифференциальных уравнений и условиям трансверсальности $\Psi_j(1 - 1/M) = 0, j = 1, \ldots, 6$.

Оптимальная управляющая функция $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$, соответствующая экстремальной функции $f^* \in S^M$ в (5), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [5]

$$\max_{u,\lambda} H(t,x,\Psi,u,\lambda) = H(t,x^*,\Psi^*,u^*,\lambda), \quad 0 \leq t \leq 1 - 1/M,$$

где (x^*, Ψ^*) является решением системы (4) и сопряжённой системы с $u = u^*$ в их правых частях. Следовательно, при положительных значениях $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ каждая из координат $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$ является корнем уравнения

$$H_{u_k}(t, x, \Psi, u, \lambda^k) = 0, \quad k = 1, \ldots, 4, \tag{6}$$

где $x = x^*,\ \Psi = \Psi^*$, а λ^k– это один из векторов (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0) или (0,0,0,1). Наличие четырёх различных на $[0, 2\pi)$ значений $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$ координат оптимального управления u^* характеризует оптимальный скользящий режим.

Функции P_{M^4} соответствуют координаты $u_1^* = \pi/4, u_2^* = 3\pi/4$, $u_3^* = 5\pi/4,\ u_4^* = 7\pi/4$ оптимального управления u^* и значения параметров $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = \lambda_4^* = 1/4$. Условия трансверсальности приводят к начальным условиям $\Psi_k(0) = 0,\ k = 1, \ldots, 6$. Проварьируем эти начальные данные, положив $\Psi_k(0) = \alpha_k,\ k = 1, \ldots, 6$. Сохранение скользящего режима в момент $t = 0$ для варьированных значений $\Psi(0)$ означает равенство между собой коэффициентов при $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,\ \lambda_4$ функции Гамильтона (5) при $t = 0$ в точке $u^* = u^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$.

Приравнивая коэффициенты при $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, получаем соотношения между координатами $\Psi(0)$

$$\alpha_1 = \alpha_5 + r_1||(\alpha_1, \alpha_2)||, \quad \alpha_2 = -\alpha_6 + r_2||(\alpha_1, \alpha_2)||, \quad \alpha_4 = 0,$$

где $r_1, r_2 \to 0$ при $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$. Полагаем так же $\alpha_3 = 0$.

Таким образом, вариация начальных данных вектора $\Psi(0)$, сохраняющая скользящий режим, имеет вид

$$\begin{aligned}&(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0), \Psi_5(0), \Psi_6(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, \alpha_1, -\alpha_2) + \\ &+o((\alpha_1, \alpha_2)), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \to (0, 0).\end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (4) при $u = u^*$ и $\lambda = \lambda^*$ имеет решение $x_k^*(t) = 0,\ k = 1, \ldots, 6,\ x_7^*(t) \neq 0$. Аналогично система дифференциальных уравнений сопряжённой системы с теми же $u = u^*$ и $\lambda = \lambda^*$ и с нулевыми начальными условиями в точке $t = 0$ имеет решение $\Psi^*(t) = 0$.

Так как $H_{u_k u_k}(t, x^*, \Psi^*, u^*, \lambda^k) \neq 0$, то уравнения (6) однозначно определяют аналитические неявные функции $u_k = u_k(t, x, \Psi)$, в окрестности точки (x^*, Ψ^*), $u_k(t, x^*, \Psi^*) = u_k^*,\ k = 1, 2, 3, 4$. Если в правые части системы (4) и сопряжённой системы подставить $u = u(t, x, \Psi) = (u_1(t, x, \Psi), u_2(t, x, \Psi), u_3(t, x, \Psi), u_4(t, x, \Psi))$, то их решение (x, Ψ) аналитически зависит от начальных данных и параметра λ. Таким образом,

(x, Ψ) имеет производные по α до второго порядка. Следовательно, тем же свойством обладает и управление $u = u(t, x(\alpha), \Psi(\alpha)) = u(\alpha)$.

Продифференцируем систему (4) по α_j, $j = 1, 2$. Тогда для уравнения относительно $\dot{x}_4(t)$ имеем

$$\left[\tfrac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = \textstyle\sum_{k=1}^{4}((x_1)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (x_2)_{\alpha_j} \cos u_k^* +$$
$$+(1-t)\cos 2u_k^*(u_k)_{\alpha_j}) \quad (x_4)_{\alpha_j}(0) = 0, j = 1, 2.$$

Подставим значения $u_1^* = \pi/4$, $u_2^* = 3\pi/4$, $u_3^* = 5\pi/4$, $u_4^* = 7\pi/4$, получим

$$\left[\frac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt}\right]_{\alpha=0} = 0, \quad (x_4)_{\alpha_j}(0) = 0.$$

Это означает, что изменение координат вектора $\Psi(0)$ не вызывает изменения координаты x_4 фазового вектора, следовательно, вдоль направления $Im\, a_3$ точка $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ граничной поверхности $\partial V_5(M)$, доставляемая функцией $P_{M^4}(z)$, имеет угловой характер, что завершает доказательство теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Charzynski Z., Janowski W.* Domaine de variation des coefficients A_2 et A_3 des functions univalentes borness//Bull.Soc.Sci.et Lettre.:Lodz,1959.c1.3,v.10,№ 4.

2. *Гордиенко В. Г.* Множество значений начальных коэффициентов ограниченных однолистных функций// Известия вузов. Сер. Математика. 1988. № 8. С. 14 – 21.

3. *Захаров А. М., Прохоров Д. В.* Седловые точки множества начальных коэффициентов однолистных функций// Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун.-та, 2003. Вып. 5. С. 33 – 36.

4. *Прохоров Д. В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций// Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659 – 1667.

5. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимального управления. М : Наука, 1969. 308 с.