Условие монотонности $h_{\overline{\beta}}(\overline{\sigma}) > h_{\beta}(\sigma)$, приводящее ввиду (5),(6) к решению задачи (1), вытекает из теоремы 3 (достаточно положить $h := h_{\beta}(\sigma)$ и переобозначить $\sigma := \overline{\sigma}$). Перебор базисов заканчивается с выполнением (6).

Обозначим $M := \left\{k \in \overline{0, N} : y_{2,k} - y_{1,k} = \max_{k \in \{0,N\}} (y_{2,k} - y_{1,k})\right\}$, $|M|$ – количество элементов во множестве $M$.

**Замечание.**

Одним из достаточных условий единственности решения задачи (1) является $|M| \geq n+1$. В таком случае, в качестве начального базиса целесообразно брать $\sigma \in \Omega$: $j_k \in M$, $k = \overline{0, n+1} \setminus \{r\}$. Тогда решение задачи (1) будет найдено уже на первой итерации алгоритма.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ*( проект НШ – грант№ 4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И. Ю.* Об условной задаче наилучшего приближения сегментной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 12–15.

УДК 514.764

**С. В. Галаев, А. В. Гохман**

# ОБОБЩЕННЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Вводятся понятия геодезической пульверизации связности над гладким распределением и обобщенной гамильтоновой системы, в терминах которых дается инвариантное описание движения механической системы со связями.

В работе [1] В. В. Вагнер привлекает развитые им ранее геометрические методы для изучения конкретных динамических систем со связями. Используя специальные системы координат, Вагнер записывает уравнение движения неголономной системы при отсутствии внешних сил в следующем виде:

$$\frac{dx^n}{dt} = -\Gamma^n_a \frac{dx^a}{dt}, \qquad \frac{dx^a}{dt} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0. \tag{1}$$

В настоящей статье мы показываем, что кривые, определяемые уравнениями (1), являются проекциями интегральных кривых векторного поля, называемого нами геодезической пульверизацией связности над распределением. В статье рассматривается векторное расслоение $(D, \pi, X)$, тотальное пространство $D$ которого является гладким распределением контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$, заданной на многообразии $X$ [2]. На многообразии $D$ определяется геодезическая пульверизация связности над распределением, являющаяся аналогом геодезической пульверизации, заданной на пространстве касательного расслоения $TX$, и имеющая ясную физическую интерпретацию – проекции интегральных кривых геодезической пульверизации связности над распределением совпадают с допустимыми геодезическими (траекториями движения механической системы со связями). Хорошо известно, что в случае, когда $D = TX$, геодезическая пульверизация совпадает с гамильтоновой системой, естественным образом возникающей на касательном расслоении риманова многообразия. Существует несколько подходов к определению аналога гамильтоновой системы – контактного гамильтонова векторного поля на многообразии с почти контактной метрической структурой (см. [2]). Введенная в этой статье обобщенная гамильтонова система тесно связана с геодезической пульверизацией связности над распределением и в некоторых случаях совпадает с известными типами контактных гамильтоновых векторных полей.

Пусть $X$ – гладкое многообразие нечетной размерности $n$, $\Xi(X)$ – $C^\infty(X)$ – модуль гладких векторных полей на $X$. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса $C^\infty$.

Пусть $(D, \varphi, g, \lambda, \vec{\xi}, D^\perp)$ — контактная метрическая структура (см. [2]), заданная на многообразии $X$. Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n)$ $(a, b, c, e = 1, ..., n-1)$ на многообразии $X$ будем называть адаптированной к распределению $D$, если $D^\perp = Span(\frac{\partial}{\partial x^n})$.

**Теорема 1**. *Всякая внутренняя линейная связность определяет связность над распределением, и обратно, связность над распределением $D$ определяет линейную связность в неголономном многообразии $D$, если имеет место равенство $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a)x^{n+c}$.*

Контактное гамильтоново векторное поле $\vec{u}$ (см. [2]) определяется на многообразии с почти контактной метрической структурой посредством равенства $i_{\vec{u}}d\eta = -df$, где гладкая функция $f$ называется *гамильтонианом.*

Равенство $i_{\vec{u}}d\eta = -df$ выполняется лишь при условии $\vec{\xi}f = 0$, что эквивалентно обращению в ноль производных $\partial_n f$ в адаптированной карте. В работах [3, с.180; 4, с.30] контактное гамильтоново векторное поле рассматривается как векторное поле, удовлетворяющее следующим условиям: $i_{\vec{u}}\eta = f, i_{\vec{u}}d\eta = (\vec{\xi}f)\eta - df$.

Ниже дано определение обобщенной гамильтоновой системы – аналога контактного векторного поля для случая почти контактной метрической структуры. Предварительно докажем теорему.

**Теорема 2.** *Пусть* $\omega$ *— допустимая симплектическая структура, т.е. 2-форма на* $X$*, удовлетворяющая следующим условиям:* $a)\,\omega(\vec{x},\vec{\xi}) = 0; b)\, rk\,\omega = n-1; c)\, d\omega = 0$*,* $f$ *– гладкая функция на многообразии* $X$*. Тогда существует единственное векторное поле* $\vec{u}$ *на* $X$*, удовлетворяющее условиям:*

$$1.\, i_{\vec{u}}\eta = \vec{\xi}f, \qquad 2.\, i_{\vec{u}}\omega = (\vec{\xi}f)\eta - df.$$

**Доказательство.** Воспользуемся адаптированными координатами. Имеем: $\eta = \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \vec{u} = u^a\vec{e}_a + u^n\vec{e}_n, \vec{\xi} = \partial_n$, $\vec{\xi}f = \partial_n f, \omega = = \omega_{ab}dx^a \otimes dx^b, df = \vec{e}_a f dx^a + \partial_n \theta^n$

Таким образом, равенства 1, 2 перепишутся соответственно в виде:

$$1.'\, u^n = \vec{\xi}f; \qquad 2.'\, \omega_{ba}u^b = \vec{e}_a f.$$

Искомым векторным полем, таким образом, является поле, однозначно определяемое в адаптированных координатах равенством

$$\vec{u} = \omega^{ac}\vec{e}_c f\vec{e}_a + \partial_n f\partial_n.\,\square \tag{2}$$

Назовем векторное поле (2) *обощенной гамильтоновой системой* (ОГС), а функцию $f$ — *обощенным гамильтонианом.* ОГС в соответствии с (2) раскладывается в сумму $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, где $\vec{u}_1 = \omega^{ac}\vec{e}_c f\vec{e}_a$, $\vec{u}_2 = \partial_n f\partial_n$. Если $\partial_n f = 0$ и $\omega = d\eta$, то $\vec{u}_1$ является контактным гамильтоновым векторным полем в смысле [2].

Векторное поле $\vec{S} \in \Gamma(\tilde{D})$ на многообразии $D$ назовем *полупульверизацией*, если выполняется следующее условие: $\pi_*(\vec{S}_{\vec{v}}) = \vec{v}$, $\vec{v} \in D$. Локальное представление поля $\vec{S}$ в адаптированных координатах имеет вид $\vec{S}(x^\alpha, x^{n+a}) = x^{n+a}\partial_a - x^{n+a}\Gamma^n_a\partial_n + S^{n+a}\partial_{n+a}$. Интегральные кривые поля $\vec{S}$ определяются системой уравнений, равносильной системе

$$\begin{cases} \frac{d^2x^a}{dt^2} = S^{n+a}(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{dt}), \\ \frac{dx^n}{dt} = -\Gamma^n_a\frac{dx^a}{dt}. \end{cases} \tag{3}$$

Полупульверизацию $\vec{S}$ будем называть *пульверизацией*, если она удовлетворяет дополнительному условию $[\vec{C}, \vec{S}] = \vec{S}$, где $\vec{C} = x^{n+a}\partial_{n+a}$.

**Теорема 3.** *Всякая внутренняя линейная связность* $\Gamma^a_{bc}$ *определяет пульверизацию* $\vec{S}$*, координатное представление которой* $\vec{S}$ *имеет вид* $\vec{S} = x^{n+a}\vec{\epsilon}_a$*, где* $\vec{e}_a \in HD$*,* $\pi_*(\vec{\epsilon}_a) = \vec{e}_a$*,* $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_a\partial_{n+b}$*.*

Из теоремы 3 следует, что уравнения (3) для геодезической пульверизации совпадают с уравнениеми (1) и, таким образом, оказывается справедливой следующая теорема.

**Теорема 4.** *Проекции интегральных кривых геодезической пульверизации $\vec{S}$ совпадают с геодезическими внутренней линейной связности.*

Пусть $D$ — распределение почти контактной метрической структуры и $\Gamma^a_{bc}$ — коэффициенты внутренней симметричной метрической связности. На многообразии $D$ в этом случае можно построить допустимую (по отношению к $\tilde{D}$) симметрическую форму $G$ [5], которая, в свою очередь, позволяет задать лагранжеву динамическую систему — обобщенную гамильтонову систему.

Пусть $\lambda = \partial_{n+a} T dx^a$, где $T = \frac{1}{2} g_{ab} x^{n+a} x^{n+b}$ — допустимая (по отношению к $\tilde{D}$) 1-форма. Тогда форма $\Omega = d\lambda$ оказывается допустимой симплектической формой на $D$, если соответствующая контактная структура является $K$-контактной [6]. В более общем случае имеем равенство $\Omega = \omega + \tilde{\omega}$, где $\omega$ — допустимая форма. В качестве обощенного гамильтониана рассмотрим функцию $T - \vec{C}\,T$. Имеет место

**Теорема 5.** *Обощенная гамильтонова система, определяемая формой $\omega$ и обобщенным гамильтонианом $T - \vec{C}\,T$, совпадает с векторным полем $\vec{S} + (\vec{\epsilon} T)\vec{\epsilon}$, где $\vec{S}$ — геодезическая пульверизация.*

**Доказательство.** Нам нужно доказать, что выполняются условия

$$\tilde{\eta}(\vec{X}) = \vec{\epsilon} T, \qquad i_{\vec{X}}\omega = (\vec{\epsilon} T)\tilde{\eta} - dT, \tag{4}$$

где $\vec{X} = \vec{S} + (\vec{\epsilon} T)\vec{\epsilon}$. В адаптированных координатах мы имеем $\Omega = \vec{\epsilon}_b T_{\cdot a} dx^b \wedge dx^a + T_{\cdot a \cdot b} \Theta^{n+b} \wedge dx^a + \partial_n T_{\cdot a} \Theta^n \wedge dx^a$, и, следовательно, $\omega = \vec{\epsilon}_b T_{\cdot a} dx^b \wedge dx^a + T_{\cdot a \cdot b} \Theta^{n+b} \wedge dx^a$, где точкой обозначается производная по слоевым координатам. Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в справедливости (4).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вагнер В. В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. Вып. 5. С. 301–327.

2. *Pitis G.* Hamiltonian Fields and Energy in Contact Manifolds // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2008. Vol. 5, №1, P. 63–77.

3. *Eberard D. B., Maschke M., Van Der Schaft A. J.* An extension of hamiltonian systems to the thermodynamic phase space: towards a geometry of nonreversible processes // Reports on mathematical physics. 2000. Vol. 60. № 2. P. 175–198.

4. *Crasmareanu M.* Completeness of hamiltonian vector fields in jacobi and contact geometry // U.P.B. Sci. Bull. Series A, 2011. Vol. 73, № 2. P. 23–36.

5. *Galaev S. V.* Contact structures with admissible Finsler metrics Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of International Meeting (Edited by M. C. Duffy, V. O. Gladyshev, A. N. Morozov, P. Rowlands), Moscow, 4 - 7 July 2011. Moscow : BMSTU, 2012. P. 80–87.

6. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М. : МПГУ, 2003.

УДК 517.54

**В. Г. Гордиенко, К. А. Пилясова**

## О ЛОКАЛЬНО ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИИ ПИКА

Обозначим через $S^M$, $M > 1$, класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : \ |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < M, \ z \in E$.

В настоящей статье устанавливается свойство граничной поверхности $\partial V_5(M)$ множества значений $V_5(M) = \{(a_2, a_3, a_4, Re\, a_5) : \ f \in S^M\}$ в окрестности точки $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$, достовляемой симмметризованной функцией Пика

$$P_{M^4}(z) = \sqrt{\frac{2z^2}{M^4(M^2(1+z^4) + \sqrt{(1+z^4)^2 - 4z^4})}}, \quad z \in E.$$

Следующая теорема развивает и дополняет результат работ [1],[2,],[3].

**Теорема.** *Точка* $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ *граничной поверхности* $\partial V_5(M)$*, доставляемая функцией* $P_{M^4}(z)$*, вдоль направления* $Im\, a_3$ *имеет угловой характер.*

**Доказательство теоремы.**

Функции $f \in S^M$, доставляющие точки граничной поверхности $\partial V_5(M)$ отображают $E$ на круг радиуса $M$ с не более чем четырьмя кусочно аналитическими разрезами. Известно [4], что все такие функции можно представить в виде $f(z) = Mw(z, \log M)$, где

$$w(z, t) = e^{-t}(z + a_2(t) z^2 + \ldots) \tag{2}$$

является интегралом обобщённого дифференциального уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad 0 \le t \le \log M, \tag{3}$$