3) удовлетворяет уравнению

$$\Phi(f, x) = 0,$$

где $\Phi(f, x) = b_1 f(\overline{\omega}_1 x) + b_2 f(\overline{\omega}_2 x) + 6f(1 - x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. 1966. Т. 70(112), № 3. С. 310-–329.
2. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Математика и ее приложения : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 17–24.
3. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Математика и ее приложения : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 70–72.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

УДК 517.984

М. Ю. Игнатьев

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА НЕКОМПАКТНОМ А-ГРАФЕ

А-графом называется связный геометрический граф, в котором любые два цикла имеют не более одной общей вершины. Обратная задача Штурма – Лиувилля на компактных А-графах подробно исследована в [1]. Рассмотрим некомпактный А-граф G с множеством вершин V и множеством ребер $\mathcal{E} \cup \mathcal{R}$, где $\mathcal{E}$ – множество компактных ребер и $\mathcal{R}$ – множество лучей. Пусть $y(\cdot)$ – некоторая функция, определенная на G. Следующее условие во внутренней вершине v назовем *стандартным условием склейки* $MC(v)$:

$$\sum_{r \in I(v)} \partial_r y(v) = 0 \qquad (1)$$

где $I(v)$ – множество ребер, инцидентных вершине v, $\partial_r y(v)$ – производная по направлению внутрь ребра r. Пусть множество граничных вершин ∂G представлено в виде объединения двух непересекающихся множеств: $\partial G = \partial_K G \cup \partial_D G$. Для вершин $v \in \partial_K G$ мы определим условие склейки $MC(v)$ соотношением (1) (что, очевидно, эквивалентно, однородному условию Неймана), для $v \in \partial_D G$ мы определим условие $MC(v)$ как однородное условие Дирихле

$$y(v) = 0.$$

Пусть $q(x)$ – вещественнозначная суммируемая на G функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_r (1+|x|)|q(x)|\,d|x| < \infty$$

для всех $r \in \mathcal{R}$, где $|x|$ – натуральный параметр на r, отсчитываемый от начала луча. Рассмотрим на G оператор Штурма – Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell y := -y'' + q(x)y,$$

условием непрерывности и условиями склейки $MC(v), v \in V$.

Рассмотрим произвольный луч $r \in \mathcal{R}$. Функция $\psi_r(x,\rho)$, $x \in G$, $\rho \in \Omega_+ := \{\mathrm{Im}\rho > 0\}$ называется *решением типа Вейля, ассоциированным с* r, если она удовлетворяет следующим условиям:
1) непрерывна по x на G и удовлетворяет условиям $MC(v)$ для всех $v \in V$;
2) является решением уравнения $\ell\psi_r = \rho^2\psi_r$, $x \in \mathrm{int}\ r'$, $r' \in \mathcal{E} \cup \mathcal{R}$;
3) $\psi_r(x,\rho) = O\left(\exp(i\rho|x|)\right)$ при $x \to \infty$, $x \in r'$, $r' \in \mathcal{R} \setminus \{r\}$;
4) $\psi_r(x,\rho) = \exp(-i\rho|x|)(1+o(1))$ при $x \to \infty$, $x \in r$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Для $x \in r$ $\psi_r(x,\rho)$ мероморфна по ρ в Ω_+ с конечным (возможно пустым) множеством полюсов Z_r^-. Все полюса простые и лежат на мнимой оси. Для вычетов $\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_r(x,\rho)$, $\rho_0 \in Z_r^-$ справедливы асимптотические представления:*

$$\mathrm{res}_{\rho=\rho_0}\psi_r(x,\rho) = i\alpha_r(\rho_0)\exp(i\rho_0|x|)(1+o(1)), x \to \infty, x \in r,$$

где $\alpha_r(\rho_0) \in (0,+\infty)$.

Лемма 2. *Для $\rho_0 \in \mathbf{R} \setminus \left(\{0\} \cup Z_0^+\right)$ существуют предельные значения $\psi_r(x,\rho_0) := \lim\limits_{\rho\to\rho_0, \rho\in\Omega_+} \psi_r(x,\rho)$. Если $\rho_0 \in Z_0^+$, то $\psi_r(x,\rho)$ и $\psi_r'(x,\rho)$ ограничены при $\rho \to \rho_0, \rho \in \Omega_+$. Здесь Z_0^+ – некоторое не более, чем счетное множество вещественных чисел, обладающее следующим свойством: число элементов Z_0^+ на отрезке $[t, t+1]$ ограничено константой, не зависящей от t.*

Лемма 3. *Для $\psi_r(x,\rho)$, $\rho \in \mathbf{R} \setminus \left(\{0\} \cup Z_0^+\right)$ справедливо следующее асимптотическое представление:*

$$\psi_r(x,\rho) = \exp(-i\rho|x|) + s_r(\rho)\exp(i\rho|x|) + o(1), \quad x \in r,\ x \to \infty.$$

Набор $J_r := \{s_r(\cdot), Z_r^-, \alpha_r(\rho), \rho \in Z_r^-\}$ назовем *данными рассеяния, ассоциированными с* r.

Для однозначного восстановления оператора Штурма – Лиувилля на A-графе G, помимо данных рассеяния, ассоциированных с лучами графа, требуется также задание некоторых спектральных характеристик, связанных с частью его вершин.

Рассмотрим произвольную вершину $v \in V$. Функцию $\Phi_v(x, \lambda, G)$, назовем *решением Вейля, ассоциированным с* v, если она удовлетворяет следующим условиям:
1) непрерывна по x на G и удовлетворяет условиям $MC(u)$ для всех $u \in V \setminus \{v\}$;
2) является решением уравнения $\ell\Phi_v = \lambda\Phi_v$, $x \in \mathrm{int}\, r$, $r \in \mathcal{E} \cup \mathcal{R}$;
3) $\Phi_v(\cdot, \lambda, G) \in L_2(G)$;
4) $\Phi_v(v, \lambda, G) = 1$.
Величину

$$M_v(\lambda, G) := \sum_{r \in I(v)} \partial_r \Phi_v(v, \lambda, G)$$

назовем *функцией Вейля, ассоциированной с* v.

Предположим для определенности, что множество граничных вершин графа G непусто. Выберем одну из них и будем считать ее корнем графа. Обозначим ее v^0. Обозначим через $\mathcal{C}$ множество всех циклов графа. Для данного цикла $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$ определим граф $G_\mathfrak{c}$ следующим образом. Пусть $\mathfrak{c}$ состоит из ребер (последовательно) $r_1, r_2, \ldots, r_p$, соединяющих v_0 с v_1, v_1 с v_2, ..., v_{p-1} с v_0, где $v_0 =: u_\mathfrak{c}$ – ближайшая к корню из вершин $\mathfrak{c}$. Тогда $G_\mathfrak{c}$ есть, по определению, граф, полученный из G заменой ребра r_p, соединяющего v_{p-1} и v_0 ребром r'_p той же длины, соединяющим v_{p-1} и дополнительную вершину $v_\mathfrak{c}$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Задание набора данных* J_r, $r \in \mathcal{R}$, $M_v(\cdot, G)$, $v \in \partial G \setminus \{v^0\}$, $M_{v_\mathfrak{c}}(\cdot, G_\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$ *однозначно определяет потенциал* $q(\cdot)$ *почти всюду на* G.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V. A.* Uniqueness of recovering of Sturm – Liouville operators on A-graphs from spectra// Results in Mathematics. 2009. Vol. 55, № 1-2. P. 199–207.