УДК 517.984

В. В. Корнев, А. П. Хромов

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим систему Дирака

$$y_1'(x) - q_2(x)y_2(x) = \lambda y_1(x), \tag{1}$$
$$y_2'(x) - q_1(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x) \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$y_1(0) = y_1(1), \quad y_2(0) = y_2(1), \tag{3}$$

где $q_j(x)$ — комплекснозначные, непрерывные функции на отрезке $[0,1]$. В отличие от случая краевых условий Дирихле $y_1(0) = y_2(0)$, $y_1(1) = y_2(1)$, рассмотренных в [1], в случае периодических условий приходится сталкиваться с новыми трудностями из-за возможной кратности собственных значений.

В работе [2] получена следующая асимптотика собственных значений краевой задачи (1)–(3):

Теорема 1. *Собственные значения краевой задачи* (1)–(3) *за исключением некоторого конечного числа образуют две бесконечные последовательности*

$$\lambda_n' = 2n\pi i + \varepsilon_n', \quad \lambda_n'' = 2n\pi i + \varepsilon_n'', \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \dots, \tag{4}$$

где $\varepsilon_n', \varepsilon_n'' \to 0$ *при* $n \to \pm\infty$.

В случае $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n''$ *собственные значения простые, а при* $\varepsilon_n' = \varepsilon_n''$ — *двукратные.*

В данной статье выводятся асимптотические формулы, уточняющие формулы (4).

Система (1)–(2) эквивалентна системе

$$z_1(x) = c_1 + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t)\, dt, \tag{5}$$

$$z_2(x) = c_2 + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) z_1(t)\, dt, \tag{6}$$

где $z_1(x) = e^{-\lambda x} y_1(x)$, $z_2(x) = e^{\lambda x} y_2(x)$; c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Пусть $z_{11}(x)$, $z_{21}(x)$ — решение системы (5)–(6) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, а $z_{21}(x)$, $z_{22}(x)$ — решение при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Стандартные рассуждения показывают, что уравнение для собственных значений задачи (1)–(3) имеет вид

$$e^{2\lambda} - g_1(\lambda)e^{\lambda} + g_2(\lambda) = 0, \tag{7}$$

где $g_1(\lambda) = z_{11}^{-1}(\lambda)(1 + z_{11}(1)z_{22}(1) - z_{12}(1)z_{21}(1))$, $g_1(\lambda) = z_{11}^{-1}(1)z_{22}(1)$.

В дальнейшем будем обозначать одним и тем же символом α_n произвольные числа, для которых $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$, а через β_n — такие α_n, которые можно вычислить.

Согласно [3] при $\lambda_n = 2n\pi i + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$, справедливы асимптотические формулы

$$g_j(\lambda_n) = 2^{2-j} + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

где $\omega_n = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \beta_n\varepsilon_n^2 + \beta_n\varepsilon_n^3 + \beta_n\varepsilon_n^4$.

Лемма 1. *Для чисел ε_n' и ε_n'' из формул* (4) *справедливы оценки*

$$\varepsilon_n' = \alpha_n^{1/2}, \quad \varepsilon_n'' = \alpha_n^{1/2}.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$L_{\pm}(\lambda) = e^{\lambda} - \frac{1}{2}g_1(\lambda) \mp \sqrt{g_3(\lambda)}, \quad g_3(\lambda) = \frac{1}{4}g_1^2(\lambda) - g_2(\lambda).$$

Рассмотрим собственные значения $\lambda_n = 2n\pi i + \varepsilon_n$ краевой задачи (1)–(3). Они являются корнями уравнения (7). Следовательно,

$$L_+(\lambda_n) \cdot L_-(\lambda_n) = 0.$$

Пусть, для определенности, $L_+(\lambda_n) = 0$. В этом случае

$$e^{\varepsilon_n} = 1 + x_n, \tag{9}$$

где

$$x_n = \frac{1}{2}g_1(\lambda_n) + \sqrt{g_3(\lambda_n)} - 1. \tag{10}$$

На основании (8) заключаем, что

$$g_3(\lambda_n) = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4),$$
$$\sqrt{g_3(\lambda_n)} = \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2),$$
$$x_n = \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2),$$
$$x_n^2 = \alpha_n + O(\varepsilon_n^2).$$

Используя эти соотношения, из (9) получаем, что

$$\varepsilon_n = x_n + O(x_n^2), \tag{11}$$
$$\varepsilon_n = \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2),$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_n = \alpha_n^{1/2}. \tag{12}$$

Случай $L_-(\lambda_n) = 0$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* ε_n *— любое из* ε_n' *или* ε_n''. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\varepsilon_n = \pm\beta_n^{1/2} + \alpha_n^{3/4}.$$

Замечание. Вопрос о знаке перед $\beta_n^{1/2}$ не ясен.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\lambda_n = 2n\pi i + \varepsilon_n$ являются собственными значениями задачи (1)–(3) и, для определенности, $L_+(\lambda_n) = 0$. В этом случае по формуле (10) имеем

$$x_n = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4) + \sqrt{\omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4)}.$$

В силу (12) $\omega_n = \beta_n + \alpha_n^{3/2}$ и поэтому

$$x_n = \beta_n + \alpha_n^{3/2} + \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}}.$$

Отсюда с учетом (11) заключаем, что

$$\varepsilon_n = \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \alpha_n. \tag{13}$$

Возможны два случая. В первом случае

$$\left|\sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \sqrt{\beta_n}\right| \le \left|\alpha_n^{3/4}\right|.$$

В этом случае из (13) следует, что

$$\varepsilon_n = -\sqrt{\beta_n} + \alpha_n^{3/4}. \tag{14}$$

Во втором случае

$$\left|\sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \sqrt{\beta_n}\right| > \left|\alpha_n^{3/4}\right|.$$

В этом случае

$$\left|\sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} - \sqrt{\beta_n}\right| = \left|\beta_n + \alpha_n^{3/2} - \beta_n\right| \cdot \left|\sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \sqrt{\beta_n}\right|^{-1} \le \left|\alpha_n^{3/4}\right|.$$

Учитывая это, из (13) получаем, что

$$\varepsilon_n = \sqrt{\beta_n} + \alpha_n^{3/4}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует утверждение теоремы.

Случай $L_-(\lambda_n) = 0$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Для кратных собственных значений можно получить еще более точную асимптотику.

Теорема 3. *Если $g_3(\lambda_n) = 0$ для некоторого бесконечного множества Λ собственных значений λ_n, то достаточно большие по модулю λ_n из Λ двукратны, и для них справедлива асимптотика*

$$\lambda_n = 2n\pi i + \beta_n + \alpha_n^2.$$

Доказательство. По теореме 1 число корней уравнения (7) в круге $|2n\pi i - \lambda| < \delta$ при больших $|n|$ равно 2. Число $\varkappa_+$ ($\varkappa_-$) корней $L_+(\lambda)$ ($L_-(\lambda)$) в таком случае не больше 2, причем $\varkappa_+ + \varkappa_- = 2$. Поэтому, если $g_3(\lambda_n) = 0$, то $L_\pm(\lambda_n) = 0$, $\varkappa_\pm \ge 1$. Следовательно, $\varkappa_+ = \varkappa_- = 1$, т. е. λ_n — двукратный корень. В этом случае (9) примет вид

$$e^{\lambda_n} = \frac{1}{2} g_1(\lambda_n).$$

Отсюда

$$e^{\lambda_n} = 1 + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \quad \varepsilon_n = y_n + O(y_n^2), \tag{16}$$

где $y_n = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4) = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2)$. Замечая, что $y_n^2 = \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2)$, из (16) получаем

$$\varepsilon_n = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2). \tag{17}$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_n = \alpha_n$, и (17) переходит в $\varepsilon_n = \beta_n + \alpha_n^2$.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270*).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Асимптотика собственных значений и собственных функций системы Дирака с квадратично суммируемым потенциалом // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зимн. шк. 27 янв. – 3 февр. 2012 г.. Саратов : Научная книга, 2012. С. 34–35.

2. *Бурлуцкая М. Ш.* Система Дирака с непрерывным потенциалом и периодическими краевыми условиями // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения – XXIII». Воронеж : Издат.-полиграф. центр Воронеж. гос. ун-та, 2012. С. 34–35.

3. *Хромов А. П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений системы Дирака с периодическими краевыми условиями и непрерывным потенциалом // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения – XXIII». Воронеж : Издат.-полиграф. центр Воронеж. гос. ун-та, 2012. С. 194–196.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫША

Иерархичесие игры — это модели конфликтных ситуаций с неравноправными участниками, в которых важную роль играет информированность первого игрока об интересах второго [1]. Исследованию таких игр при различных вариантах информированности посвящены, в частности, работы [2-5]. В данной статье предполагается, что первый игрок не знает точно функции выигрыша второго, которая влияет и на его интересы. При этих предположениях находится наибольший гарантированный результат первого игрока. Полученная формула применяется для частного случая квадратичных функций выигрыша игроков.

Пусть X, Y — множества стратегий игроков, F_i и G_i, $(i = 1,2)$ — их функции выигрыша. Таким образом, имеем систему $\Gamma = (X, Y, F_1, F_2, G_1, G_2)$. Рассмотрим иерархическую игру $\tilde{\Gamma} = (\Phi_1, \Psi_2 \times Y, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{G}_1, \tilde{G}_2)$, где $\Phi_1 = \{\phi_1 \mid \phi_1 : Y \to 2^X\}$, $\Psi_2 = \{\psi_2 \mid \psi_2 : 2^X \to X\}$, причем при всех $T \subset X$ выполняется условие $\psi_2(T) \in T$, функции $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$, $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ определяются равенствами $\tilde{F}_i(\phi_1, (\psi_2, y)) = F_i(\psi_2(\phi_1(y)), y)$, $\tilde{G}_i(\phi_1, (\psi_2, y)) = G_i(\psi_2(\phi_1(y)), y)$, $i = 1, 2$.

Информационная интерпретация такого расширения исходной игры и доказательство его оптимальности приведены в [6]. Наибольший гарантированный результат первого игрока в построенной игре $\tilde{\Gamma}$ определяется