при $s \to \infty$. Итак, $S_k = 0$ и поэтому функция $f = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект МД-300.2011.1) и РФФИ (проект 10-01-00097).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Терехин П. А.* О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространствах $L^p[0,1]$ // Математические заметки. 2008. Т. 83. Вып. 5. С. 722–740.

УДК 519.713.2, 512.534

В. А. Молчанов

ОТНОСИТЕЛЬНО ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ КЛАССА УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ В КЛАССЕ ПОЛУГРУПП

Под плоскостью [1] будем понимать систему вида $\Pi = (X, L)$, где X– непустое множество точек и L – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) через любые две точки проходит одна и только одна прямая; (A_2) каждая прямая содержит по крайней мере три точки; (A_3) в множестве X есть три точки, не лежащие на одной прямой. В частности, плоскость $\Pi = (X, L)$ является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой $l \in L$ и любой точки $x \in X \setminus l$ существует единственная прямая l', удовлетворяющая условиям $x \in l'$ и $l \cap l' = \emptyset$.

По определению [2] планарные автоматы являются структуризованными автоматами $\mathbf{A} = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$ с множеством состояний X_1 и множеством выходных сигналов X_2, наделенными структурами плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$, полугруппой входных сигналов S, функцией переходов $\delta : X_1 \times S \to X_1$ и выходной функцией $\lambda : X_1 \times S \to X_2$, для которых при каждом фиксированном $s \in S$ преобразование $\delta(x, s) : X_1 \to X_1$ является эндоморфизмом плоскости Π_1 и отображение $\lambda(x, s) : X_1 \to X_2$ вляется гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2.

Для любых плоскостей Π_1 и Π_2 автомат $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$ с полугруппой входных сигналов S, состоящей из всех пар $s = (\varphi, \psi)$ эндоморфизмов φ плоскости Π_1 и гомоморфизмов ψ плоскости Π_1 в плоскость Π_2, функцией переходов $\delta(x, s) = \varphi(x)$ и выходной функцией $\lambda(x, s) = \psi(x)$

(здесь $x \in X_1$, $s = (\varphi, \psi) \in S$) является планарным автоматом. Такие автоматы обозначаются символом $\mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ и называются универсальными планарными автоматами, так как их подавтоматы охватывают гомоморфные образы всех планарных автоматов.

Основной результат работы [3] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов.

В настоящей статье доказана относительно элементарная определимость (см. [3]) класса универсальных планарных автоматов в классе всех полугрупп. Полученный результат дает возможность проанализировать взаимосвязь важных свойств элементарных теорий классов планарных автоматов и элементарных теорий классов полугрупп, таких как проблема элементарной эквивалентности алгебраических систем, проблема алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов алгебраических систем и др.

Для описания свойств планарных автоматов $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$ на языке УИП будем рассматривать $\mathbf{A}$ в виде пятисортной алгебраической системы $\mathbf{A} = ((X_1, L_1, \in_1), (S, \cdot), (X_2, L_2, \in_1), \delta, \lambda)$ с пятью базисными множествами X_1, L_1, S, X_2, L_2 и сигнатурой $\Omega = \{\in_1, \cdot, \in_2, \delta, \lambda\}$. Напомним, что здесь X_1 и L_1 (соответственно X_2 и L_2) — множества точек и прямых плоскости состояний Π_1 (соответственно плоскости выходных сигналов Π_2), S — множество входных символов автомата $\mathbf{A}$, $\in_1$ (соответственно, $\in_2$) — символ бинарного отношения принадлежности точек плоскости состояний Π_1 (соответственно плоскости выходных сигналов Π_2) ее прямым, $\cdot$ — символ бинарной операции полугруппы S, δ и λ — символы бинарных операций функции переходов и выходной функции автомата $\mathbf{A}$.

Элементарная теория планарных автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка УИП с пятисортными переменными $\mathbf{L_A}$. Алфавит такого языка состоит (1) из счетного множества индивидуальных переменных $A, B, ...$ (соответственно $A', B', ...$) для обозначения точек плоскости состояний (соответственно плоскости выходных сигналов) автоматов; (2) из счетного множества индивидуальных переменных $a, b, ...$ (соответственно $a', b', ...$) для обозначения прямых плоскости состояний (соответственно, плоскости выходных сигналов) автоматов; (3) из счетного множества индивидуальных переменных $s, t, ..$ для обозначения входных сигналов автоматов; (4) из двухместного предикатного символа $\in_1$ (соответственно $\in_2$)для обозначения отношения принадлежности точек плоскости состояний (соответственно плоскости выходных сигналов) автомата ее прямым; (5) из двухместного функционального символа $\cdot$ для обозначения операции умножения полугруппы входных сигналов автоматов; (6) из двухместных функциональных символов δ и λ для обозначения функции переходов и выходной функции автомата; (7) из конечного множества логических и технических символов, таких как $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \forall, \exists, =, (,)$.

Для языка $\mathbf{L_A}$ термы трех сортов получаются обычным комбинированием символа $\cdot$ — с двумя переменными третьего сорта и символов δ и λ — с переменными первого и третьего сорта, т.е. это выражения вида $A, a, A', a', s, t_1 \cdot t_2, \delta(t, t_3), \lambda(t, t_3)$, где A и t — переменная и терм первого сорта, a — переменная второго сорта, s и t_1, t_2, t_3 — переменная и термы третьего сорта, A' и a' — переменные четвертого и пятого сорта. При этом получаются термы $\delta(t, t_3)$, $t_1 \cdot t_2$ и $\lambda(t, t_3)$ первого, третьего и четвертого сорта соответственно. Термами второго и пятого сорта являются индивидуальные переменные второго и пятого сорта, обозначающие прямые, соответственно плоскости состояний и плоскости выходных сигналов автоматов.

Атомарные формулы языка $\mathbf{L_A}$ получаются обычным комбинированием символа $=$ с двумя термами одного сорта, символа $\in_1$ — с термом первого сорта и термом второго сорта и символа $\in_2$ — с термом четвертого сорта и термом пятого сорта, т.е. это выражения вида $t = t'$, $t_1 \in_1 t_2$ и $t_4 \in_2 t_5$, где t, t' — термы одного и того же сорта и t_i — термы i-го сорта (где $i = 1, 2, 4, 5$). Формулы языка $\mathbf{L_A}$ определяются по индукции обычным образом (см., например, [4]).

Полученная в работе [5] конкретная характеристика универсальных планарных автоматов позволяет доказать, что класс **Aut** всех универсальных планарных автоматов относительно элементарно определим [6] в классе всех полугрупп **Sem**.

Теорема. *Существуют такие формулы*

$$Z(x), \quad E_k(x, y), \quad L_k(\bar{x}), \quad \mathrm{Eqv}_k(\bar{x}, \bar{y}), \quad \mathrm{Ins}_k(x, \bar{y})$$

сигнатуры языка элементарной теории полугрупп $\mathbf{L_S}$ *(здесь и далее* $k = 1, 2$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$*), что любой универсальный планарный автомат* $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ *над плоскостями* $\Pi_1 = (X_1, L_1)$, $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ *и его полугруппа входных сигналов* $S = \mathrm{Inp}(\mathbf{A})$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) *множества* $\overline{Z} = \{x \in S : Z(x)\}$ *и* $\overline{L_k} = \{\bar{x} \in S^2 : L_k(\bar{x})\}$ *не пусты;*

2) *формула* $E_k(x,y)$ *задает отношение эквивалентности* $\overline{E_k}$ *на множестве* $\overline{Z}$ *с классами эквивалентности* $\overline{E_k}(x) = [x]_k$ *для элементов* $x \in Z$;

3) *формула* $\mathrm{Eqv}_k(\bar{x};\bar{y})$ *задает отношение эквивалентности* $\overline{\mathrm{Eqv}_k}$ *на множестве* $\overline{L_k}$;

4) *формула* $\mathrm{Ins}_k(x,\bar{y})$ *задает бинарное отношение* $\overline{\mathrm{Ins}_k}$ *между элементами множества* $\overline{Z}$ *и множества* $\overline{L_k}$, *которое согласовано с эквивалентностями* $\overline{E_k}$, $\overline{\mathrm{Eqv}_k}$ *по следующей формуле:*

$$(x,\bar{y}) \in \overline{\mathrm{Ins}_k} \ \wedge \ x \equiv u(\overline{E_k}) \ \wedge \ \bar{y} \equiv \bar{z}(\overline{\mathrm{Eqv}_k}) \quad \Longrightarrow \quad (u,\bar{z}) \in \overline{\mathrm{Ins}_k};$$

5) *автомат* $A = \mathrm{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ *изоморфен планарному автомату* $\overline{A} = (\overline{H_1}, S, \overline{H_2}, \overline{\delta}, \overline{\lambda})$, *где* $\overline{H_k} = (\overline{Z}/\overline{E_k}, \overline{L_k}/\overline{\mathrm{Eqv}_k}, \overline{\mu_k}\ )$, *бинарное отношение* $\overline{\mu_k} \subset \overline{Z}/\overline{E_k} \times \overline{L_k}/\overline{\mathrm{Eqv}_k}$ *для элементов* $X \in \overline{Z}/\overline{E_k}$, $Y \in \overline{L_k}/\overline{\mathrm{Eqv}_k}$ *определяется по формуле*

$$(X,Y) \in \overline{\mu_k} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,\bar{y}) \in \overline{\mathrm{Ins}_k} \ \ \text{при любых } x \in X, \bar{y} \in Y,$$

и отображения $\overline{\delta} : \overline{Z}/\overline{E_1} \times S \to \overline{Z}/\overline{E_1}$, $\quad \overline{\lambda} : \overline{Z}/\overline{E_1} \times S \to \overline{Z}/\overline{E_2}$ *для элементов* $x \in Z$, $s \in S$ *определяются по формулам*

$$\overline{\delta}([x]_1, s) = [x \cdot s]_1, \qquad \overline{\lambda}([x]_1, s) = [x \cdot s]_2;$$

6) *для любой формулы* Ψ *сигнатуры языка элементарной теории планарных автоматов* $\mathbf{L_A}$ *эффективно строится такая формула* $\overline{\Psi}$ *сигнатуры языка элементарной теории полугрупп* $\mathbf{L_S}$, *что* Ψ *в том и только том случае истинна на универсальном планарном автомате* $\mathbf{A}$, *если формула* $\overline{\Psi}$ *истинна на его полугруппе входных сигналов* $\mathrm{Inp}(\mathbf{A})$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980.

2. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высшая школа, 1994.

3. *Molchanov V. A.* A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.

4. *Молчанов В. А.* Нестандартные многообразия топологических алгебраических систем // Известия РАЕН, Сер. МММИУ. 1999. Т. 3, № 1. С. 14–45.

5. *Молчанов В. А.* Конкретная характеристика универсальных планарных автоматов // Математика. Механика : Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 67–69.

6. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М. : Наука, 1980.