УДК 519.7

В. Е. Новиков

РЕШЁТКИ РАЗБИЕНИЙ В ОДНОЗНАЧНОМ КОНТЕКСТЕ

Восстановим некоторые определения концептуального анализа [1]. Будем говорить, что задан *формальный полиатрибутный контекст* $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$, если заданы G — непустое конечное *множество объектов*, (M_i) — семейство непустых конечных *множеств атрибутов* с множеством индексов $1 \leq i \leq n$ и $\rho \subseteq G \times M_1 \times \ldots \times M_n$ — некоторое $(n+1)$-арное отношение. При $n = 1$ понятие полиатрибутного контекста полностью совпадает с понятием контекста обычного формального концептуального анализа [2]. Под словом "контекст"далее будем понимать "полиатрибутный контекст".

Чтобы использовать аппарат алгебры отношений В. В. Вагнера [3] на полиатрибутном контексте введём следующие обозначения. Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ — n-арное отношение. Обозначим $\bar{n} = (1, 2, 3, \ldots, n)$, $M_{\bar{n}} = M_1 \times \cdots \times M_n$, $\bar{\imath}_1 = i_1$ и $\bar{\imath}_k = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $x_{\bar{\imath}_k} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$, $M_{\bar{\imath}_k} = M_{i_1} \times M_{i_2} \times \cdots \times M_{i_k}$ для произвольных $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Введём следующее обозначение для результата булевой операции объединения над данными множествами: $\overline{\imath_k \jmath_s} = \bar{\imath}_k \cup \bar{\jmath}_s$. При этом также обозначаем $\bar{\imath}_k \subseteq \bar{n}$. Говорим, что k-система $x_{\bar{\imath}_k}$ *входит в отношение* ρ, если существует n-система $x_{\bar{n}} \in \rho$, для которой элементы $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ являются её соответствующими компонентами. Для $\bar{\imath}_s, \bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$, $a_{\bar{\imath}_s} \in M_{\bar{\imath}_s}$, $X \subseteq M_{\bar{\imath}_s}$ обозначим:

$$\pi_{\bar{\jmath}_k}(\rho) = \{y_{\bar{\jmath}_k} \in M_{\bar{\jmath}_k} \mid y_{\bar{\jmath}_k} \text{входит в } \rho\},\ \sigma_{\{a_{\bar{\imath}_s}\}}(\rho) = \{x_{\bar{n}} \in \rho \mid\ a_{\bar{\imath}_s} \subseteq x_{\bar{n}}\},$$

$$\rho_{\bar{\jmath}_k}\langle x_{\bar{\imath}_s} \rangle = \pi_{\bar{\jmath}_k}(\sigma_{\{x_{\bar{\imath}_s}\}}(\rho)),\ \overset{\frown}{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X) = \cap\{\rho_{\bar{\jmath}_k}\langle x_{\bar{\imath}_s}\rangle : x_{\bar{\imath}_s} \in X\},$$

$$\overset{\frown}{\rho}_{\bar{\imath}_s\bar{\jmath}_k}(X) = \overset{\frown}{\rho}_{\bar{\imath}_s}(\overset{\frown}{\rho}_{\bar{\jmath}_k}(X)).$$

Пусть теперь задан формальный контекст $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$. В этом случае для $(n+1)$-арного отношения $\rho \subseteq G \times M_1 \times \ldots \times M_n$ в соответствие множеству G будем ставить нулевой индекс: $\pi_0(\rho) = \{x \in G \mid x \text{ входит в } \rho\}$, $\rho_0\langle x_{\bar{\imath}_s}\rangle = \pi_0(\sigma_{\{x_{\bar{\imath}_s}\}}(\rho))$, $\overset{\frown}{\rho}_0(X) = \cap\{\rho_0\langle x_{\bar{\imath}_s}\rangle : x_{\bar{\imath}_s} \in X\}$. Если для некоторого $X \subseteq G$ существует $\bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$, такое что выполняется

$$X = \overset{\frown}{\rho}_{0\bar{\jmath}_k}(X),$$

то X называется *концептом по системе атрибутов* $\bar{\jmath}_k$ или просто *концептом* контекста $\mathbb{K}$. Концепты, отличные от $\emptyset$ и G, будем называть *собственными*.

Будем говорить, что в отношении $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ *имеет место F-зависимость* $M_{\bar{l}_q} \to M_{\bar{\jmath}_k}$, $\bar{l}_q, \bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$, если $\rho_{\bar{\jmath}_k}\langle x_{\bar{l}_q}\rangle$, $x_{\bar{l}_q} \in M_{\bar{l}_q}$, определяет отображение $\pi_{\bar{l}_q}(\rho) \to \pi_{\bar{\jmath}_k}(\rho)$. F-зависимость $M_{\bar{l}_q} \to M_{\bar{\jmath}_k}$, $\bar{l}_q, \bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$, будем называть *$B$-зависимостью*, если определяемое им отображение $\rho_{\bar{\jmath}_k}\langle x_{\bar{l}_q}\rangle\colon \pi_{\bar{l}_q}(\rho) \to \pi_{\bar{\jmath}_k}(\rho)$ является взаимно-однозначным.

Будем говорим, что контекст $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ *однозначен относительно множества объектов*, или просто *однозначен*, если отношение ρ имеет F-зависимость $G \to M_{\bar{n}}$. В частности однозначный контекст моделируется любой реляционной базой данных [4], в которой множество объектов является одним из ключей этой базы.

В [5] была установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ – однозначный контекст. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) множество собственных концептов по любому $\bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$ образует разбиение множества $\pi_0(\rho)$, которое обозначаем $\pi_0(\rho)/_{\bar{\jmath}_k}$;

2) если $\bar{l}_q \subseteq \bar{\jmath}_p$ ($\bar{l}_q, \bar{\jmath}_p \subseteq \bar{n}$), то $\pi_0(\rho)/_{\bar{\jmath}_p} \leq \pi_0(\rho)/_{\bar{l}_q}$, т.е. $\pi_0(\rho)/_{\bar{\jmath}_p}$ является измельчением разбиения $\pi_0(\rho)/_{\bar{l}_q}$;

3) если $\bar{l}_q, \bar{\jmath}_p \subseteq \bar{n}$ и $\pi_0(\rho)/_{\bar{\jmath}_p} \leq \pi_0(\rho)/_{\bar{l}_q}$, то $\pi_0(\rho)/_{\bar{\jmath}_p} = \pi_0(\rho)/_{\overline{l_q j_p}}$;

4) если концепт X в решётке концептов не является атомом, то X покрывает не менее двух концептов контекста $\mathbb{K}$;

5) высота решётки концептов этого контекста не превосходит значения $min\{n + 1, |\pi_0(\rho)|\}$, а её ширина не превосходит значения $|\pi_0(\rho)|$.

Заметим, что если отношение ρ является полным относительно G, то $\pi_0(\rho) = G$. Если это не так, то всегда можно перейти к контексту $\mathbb{K} = (G', (M_i), \rho)$, где $G' \subseteq G$ и $G' = \pi_0(\rho)$. Поэтому далее будем полагать, что однозначный контекст $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ обладает отношением ρ полным относительно множества объектов G. Обозначим $P_{\bar{\jmath}_k} = \pi_0(\rho)/_{\bar{\jmath}_k}$, $\varepsilon_{\bar{\jmath}_k}$ — это эквивалентность, соответствующая разбиению $P_{\bar{\jmath}_k}$, и $L_p(\mathbb{K}) = \{P_0, P_{\bar{\jmath}_k} \mid \bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}\}$, где P_0 — это разбиение множества G, состоящее из одного блока G. По утверждению 1 теоремы 1 получаем, что любой собственный концепт по любому $\bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$ является одним из блоков разбиения $P_{\bar{\jmath}_k}$ множества G.

Пусть $Lp(G)$ — решётка разбиений множества G.

Теорема 2. *Для любого однозначного контекста $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ множество $L_p(\mathbb{K})$ является подрешёткой решётки разбиений $L_p(G)$. И для любой подрешётки $L \subseteq L_p(G)$, содержащей P_0, существует однозначный контекст $\mathbb{K}(L)$ такой, что $L = L_p(\mathbb{K}(L))$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $L_p(\mathbb{K})$. Для любых

$j_1, j_2 \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ по определению $\bar{\jmath}_2 = (j_1, j_2)$, т.е. $j_1, j_2 \subset \bar{\jmath}_2$, и по утверждению 2 теоремы 1 $P_{\bar{\jmath}_2} \leq P_{j_1}$ и $P_{\bar{\jmath}_2} \leq P_{j_2}$. Таким образом, $P_{\bar{\jmath}_2} = P_{j_1} \wedge P_{j_2}$. И для любого $\bar{\jmath}_k = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ $P_{\bar{\jmath}_k} = P_{j_1} \wedge P_{j_2} \wedge \ldots \wedge P_{j_k}$, где $\wedge$ операция пересечения в решётке разбиений множества объектов G. Следовательно, множество $L_p(\mathbb{K})$ является подрешёткой решётки $L_p(G)$. При этом P_0 является единицей в решётках $L_p(\mathbb{K})$ и $L_p(G)$, $P_{\bar{n}}$ является нулём решётки $L_p(\mathbb{K})$. Разбиения P_j, где $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, являются коатомами решётки $L_p(\mathbb{K})$.

Обратно, пусть дана некоторая подрешётка $L \subseteq Lp(G)$, содержащая P_0, где G — конечное множество. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — все коатомы этой решётки, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — соответствующие эквивалентности на множестве G. Построим контекст $\mathbb{K}(L) = (G, (P_i), \rho)$, где $\rho = \{(g, \varepsilon_1(g), \varepsilon_2(g), \ldots, \varepsilon_n(g)) | \ g \in G\}$. Построенный контекст является однозначным, поскольку любой $g \in G$ попадает только в один блок $\varepsilon_j(g)$ разбиения P_j, $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Любой собственный концепт контекста $\mathbb{K}(L)$ по любому $\bar{\jmath}_k \subseteq \bar{n}$ является одним из блоков разбиения $P_{\bar{\jmath}_k}$ множества G. И поскольку $P_{\bar{\jmath}_k} = P_{j_1} \wedge P_{j_2} \wedge \ldots \wedge P_{j_k}$ (является пересечением некоторых коатомов решётки L), то решётки L и $L_p(\mathbb{K}(L))$ состоят из одних и тех же элементов, т.е. $L = L_p(\mathbb{K}(L))$. $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Novikov V. E.* Formal conceptual analysis within n-ary relation context // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2006. № 9 (15), вып. 2. С. 18–22.

2. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis. Mathematical Foundatoins. Berlin : Springer Verlag, 1999.

3. *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып.1. С. 3–178.

4. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М. : Мир, 1987.

5. *Новиков В. Е.* Решётки концептов в однозначном контексте // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 52–55.

УДК 519.4

В. В. Розен

АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПАРЕТО-ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Математическая модель задачи многокритериальной оптимизации может быть представлена в виде набора

$$G = \langle A, q_1, ..., q_m \rangle , \tag{1}$$