Группа G^h как подгруппа группы проективных преобразований проективной плоскости P^2 определяет геометрию плоскости $P^2 \setminus T_3$ с вырожденным кубическим абсолютом T_3, состоящим из овальной линии и пересекающей ее действительной прямой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розенфельд Б.А., Замаховский М.П.* Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. М.: МЦНМО, 2003. 560 с.

2. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит. 1955. 744 с.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов

О ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \tag{1}$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными полураспадающимися краевыми условиями специальной структуры:

$$\begin{aligned} U_i(y,\lambda) &:= \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0,\ i=\overline{1,l}, \\ U_i(y,\lambda) &:= \sum_{s+k\le\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k\le\varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0,\ i=\overline{l+1,n}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0,1,\ldots, n-1\}$, $n-l \le l < n$.

Пусть корни $\{\omega_j\}_1^n$ характеристического уравнения

$$\sum_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$$

различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n. \tag{3}$$

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует m-кратная ($1 \le m \le n$) полнота системы корневых (собственных и присоединенных) функций этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$.

Основополагающей по указанной проблеме является работа [1], в которой была сформулирована теорема об n-кратной полноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением со специальной главной частью

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в работе [2] в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения и в работе [3] в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в [4]. Случай произвольной главной части дифференциального выражения был рассмотрен в работах [5, 6]. В работах [7, 8], относящихся к общему виду пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы корневых функций в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка на некоторых лучах. Детальное исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, проведено в работе [9].

Для рассматриваемого пучка (1), (2) с условием (3) не выполняется основное предположение [9], а именно, что существует прямая d, проходящая через начало, не содержащая ω-корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше $n-l$.

Для формулировки основного результата введем обозначения:

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n};$$

$$b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k,\ i=\overline{l+1,n},\ j=\overline{1,n};$$

$$\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0},\varkappa_{i1}\},\ i=\overline{l+1,n};\quad [n]_+ = \begin{cases} n, & \text{если } n \ge 0,\\ 0, & \text{если } n < 0.\end{cases}$$

Теорема 1. *Если выполняется условие (3) и*

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^{l} \ne 0,\ \det(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \ne 0,\ \det(b_{ij})_{i,j=l+1}^{n} \ne 0,$$

то система корневых функций пучка (1), (2) m-кратно полна в $L_2[0,1]$ при $m \le n-l$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[m-1-\varkappa_i]_+$.

Теорема точна в следующем смысле. При $l=n-1$ и $m=n-l+1(=2)$ в [10, 11] получены достаточные условия на корни $\{\omega_j\}_1^n$, при которых системы корневых функций пучков вида (1), (2) 2-кратно неполны в $L_2[0,1]$ и имеют бесконечный дефект.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.

2. *Хромов А.П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.

3. *Шкаликов А.А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.

4. *Хромов А.П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов // Мат. сб. 1977. Т. 102(144), № 3. С. 457–472.

5. *Freiling G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z. 1984. Vol. 188, № 1. P. 55–68.

6. *Тихомиров С.А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1987. 126 с.

7. *Gasymov M.G., Magerramov A.M.* О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов //Докл. АН Азерб. ССР. 1974. Т. 30, № 12. С. 9–12.

8. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.

9. *Вагабов А.И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.

10. *Рыхлов В.С.* О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 114–117.

11. *Рыхлов В.С.* О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // Докл. РАЕН. Саратов, 2004. №4. С. 72–79.