та A_2 и, следовательно, параллельную прямой l, так как $A_2 \in l$. Середина N отрезка LS ($(LSNA_1) = -1$) имеет в R координаты $(1 : 0 : 2s)$ и принадлежит ортрисе.

Теорема доказана. $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М. : Наука, 1969.

2. *Ромакина Л. Н.* Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3. С. 37–44.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

О РЕГУЛЯРНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 1-ГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Далее используются обозначения: $\|\cdot\|_p$ есть норма в $L_p[0,1]$ $(1 \le p \le \infty)$; $W_p^1[0,1] := \{y \in L_p[0,1] : y' \in L_p[0,1]\}$ с нормой $\|y\|_{p,1} := \|y\|_p + \|y'\|_p$; $\mathfrak{L}_p[0,1]$ есть нормированное пространство $n \times n$ матриц-функций (м.-ф.) с компонентами из $L_p[0,1]$ и с нормой $|||X|||_p := \max_{i,j} \|\{X\}_{ij}\|_p$ для $n \times n$ м.-ф. $X(t)$ с компонентами $\{X(t)\}_{ij}$; $\mathfrak{W}_p^1[0,1]$ есть нормированное пространство $n \times n$ м.-ф. с компонентами из $W_p^1[0,1]$ и с нормой $|||X|||_{p,1} := \max_{i,j} \|\{X\}_{ij}\|_{p,1}$.

Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$Ly := y' - A(x,\lambda)y = 0, \qquad My(0) + Ny(1) = 0, \tag{1}$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, $A(x,\lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x)$, A_1, A_0 есть $n \times n$ м.-ф., а M и N числовые $n \times n$ матрицы.

В [1] рассматривался скалярный случай и при минимальных требованиях на коэффициенты дифференциального оператора были получены теоремы о базисности Рисса корневых функций этого оператора в $L_2[0,1]$ и о равномерной равносходимости внутри отрезка $[0,1]$ разложений в ряды по корневым функциям и по обычной тригонометрической системе. На оператор накладывались условия усиленной регулярности в первом случае и регулярности во втором [2]. В случае оператора L, порождающего краевую задачу (1), ситуация усложняется тем, что корни характеристического уравнения являются, вообще говоря, произвольными функциями. Целью данной статьи является определение регулярности и усиленной регулярности при минимальных требованиях на коэффициенты оператора L.

Предположим далее, что

1°) $A_1 \in \mathfrak{W}_1^1[0,1]$, $A_0 \in \mathfrak{L}_1[0,1]$;

2°) корни $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ характеристического уравнения $|A_1(x) - \varphi E| = 0$ различны при всех x, отличны от нуля, их аргументы и аргументы их разностей не зависят от x.

Предположение 2° вполне естественно при исследовании вопросов представления функций рядами по корневым функциям оператора L [3]. Так же , как и в (см. [3]), из этого предположения выводим, что

3_1°) или $\varphi_i(x) = \pi_i q(x)$, $i = \overline{1,n}$, где π_i есть различные отличные от нуля константы, а $q(x)$ положительная функция из $W_1^1[0,1]$;

3_2°) или $\varphi_i(x) = \pm\pi_0 q_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, где $\pi_0 \neq 0$ есть константа, а $q_i(x)$ есть положительные и различные при всех $x \in [0,1]$ функции из $W_1^1[0,1]$.

Известно [3], что в этом случае комплексную плоскость прямыми $\Re(\lambda\varphi_i) = \Re(\lambda\varphi_j)$ $(i,j = \overline{1,n},\ i \neq j)$ можно разбить на секторы $S_1, S_2, \ldots, S_{2h}$ с центрами в начале, где $h \leq n$. В каждом из таких секторов при определенной нумерации корней $\varphi_i(x)$ выполняются неравенства

$$\Re(\lambda\varphi_1(x)) \leq \Re(\lambda\varphi_2(x)) \leq \cdots \leq \Re(\lambda\varphi_n(x)). \qquad (2)$$

Пусть S есть фиксированный сектор S_i, а $\Psi(x)$ есть матрица-функция, которая преобразует A_1 к диагональному виду:

$$\Psi^{-1}(x)A_1(x)\Psi(x) = \mathrm{diag}\{\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)\} =: \Phi_1(x).$$

Если $A_1 \in \mathfrak{W}_1^1[0,1]$, то $\Psi, \Psi^{-1} \in \mathfrak{W}_1^1[0,1]$ и $\varphi_i \in W_1^1[0,1]$ $(i = \overline{1,n})$.

Обозначим $B_0 := \Psi^{-1}A_0\Psi - \Psi^{-1}\Psi' - \Phi_0$, где $\Phi_0 := \mathrm{diag}\{\varphi_{01}, \ldots \varphi_{0n}\}$, $\varphi_{0j} := \{\Psi^{-1}A_0\Psi - \Psi^{-1}\Psi'\}_{jj}$. Очевидно, $B_0 \in \mathfrak{L}_1[0,1]$. Пусть $\varphi_j(\cdot,\lambda) := \lambda\varphi_j + \varphi_{0j}$, $\chi_{ij}(\cdot,\lambda) := \varphi_i(\cdot,\lambda) - \varphi_j(\cdot,\lambda)$. Для $i,j = \overline{1,n}$ положим $l(i,j) = 0$ при $i \leq j$ и $l(i,j) = 1$ при $i > j$.

Обозначим через $T_c = S - \{c\}$ сектор с центром в точке $-c$, где $c \in \mathbb{C}$. Если $\lambda \in T_c$, то $\lambda + c \in S$. Таким образом, для $\lambda \in T_c$ выполняются неравенства

$$\Re((\lambda+c)\varphi_1(x)) \leq \Re((\lambda+c)\varphi_2(x)) \leq \cdots \leq \Re((\lambda+c)\varphi_n(x)). \qquad (3)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения 1°,2°. Тогда для каждого сектора T_c существует фундаментальная матрица решений*

$y(\cdot,\lambda)$ дифференциальной системы в (1), имеющая следующую асимптотику:

$$y(x,\lambda) = (\psi(x) + \varepsilon(x,\lambda))\, e^{\lambda \int_0^x \Phi_1(\xi)\, d\xi} \tag{4}$$

при $|\lambda| \to \infty$, где $\psi(x) = \Psi(x)\exp(\int_0^x \Phi_0(\xi)\, d\xi)$, а $\varepsilon(\cdot,\lambda) \in \mathfrak{W}_1^1[0,1]$ и имеет оценку

$$|||\varepsilon(\cdot,\lambda)|||_\infty \le C\left(\delta(\lambda) + \frac{1}{|\lambda|}\right), \tag{5}$$

$$\delta(\lambda) = \max_{i\ne j}\left\{\left\| \int_{l(i,j)}^{x} e^{\int_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\, d\xi} \{B_0(t)\}_{ij}\, dt \right\|_\infty\right\}. \tag{6}$$

При этом $\delta(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Кроме того, $y(\cdot,\lambda)$ есть аналитическая матрица-функция в $\mathfrak{W}_1^1[0,1]$ при $|\lambda|$ достаточно больших. Если $A_1 \in \mathfrak{W}_p^1[0,1]$, $A_0 \in \mathfrak{L}_p[0,1]$, то $B_0 \in \mathfrak{L}_p[0,1]$.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1 [4], если сделать предварительно замену $\tilde\lambda = \lambda + c$. Тогда $\tilde\lambda \in S$, для $\tilde\lambda$ в соотвествии с (3) выполняются неравенства (2) и дифференциальная система (1) преобразуется в аналогичную систему вида $y' - \tilde\lambda A_1(x)y - A_0(x,c)y = 0$, где $A_0(x,c) = A_0 - cA_1$ и, следовательно, обладает теми же свойствами гладкости, что и $A_0(x)$. Переформулируя для этой системы теорему 1 из [4] и возвращаясь к параметру λ, получим утверждение сформулированной теоремы.

Пусть $\Omega := \operatorname{diag}\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$, где $\omega_i := \int_0^1 \varphi_i(\xi)\, d\xi$. Очевидно, числа ω_i простые. В силу предположений 2° в секторах S при той же нумерации чисел ω_i, что и для φ_i, имеют место неравенства

$$\Re(\lambda\omega_1) \le \Re(\lambda\omega_2) \le \dots \le \Re(\lambda\omega_n).$$

Определение регулярности дадим аналогично определению из [5]. Будем использовать для $n\times n$ матрицы A обозначение $[A] := A + \varepsilon(\lambda)$, где компоненты матрицы $\varepsilon(\lambda)$ имеют оценки $O(\delta(\lambda) + 1/\lambda)$.

Пусть $\mu_{J_k} = \sum_{\alpha\in J_k} \omega_\alpha$, где J_k, $k = \overline{1,n}$, — произвольный набор различных $k \in \mathbb{N}$. При $k = 0$ положим $\mu_{J_0} = 0$. Отметим в комплексной плоскости точки μ_{J_k} и обозначим через M наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти точки. Точки μ_{J_k}, которые оказались на границе многоугольника M, назовем граничными, а точки, лежащие в вершинах M, — угловыми.

С учетом асимптотики (4) и вида краевых условий в (1) характеристический определитель оператора L есть

$$\Delta(\lambda) = \left|[M\psi(0)] + [N\psi(1)]e^{\lambda\Omega}\right|.$$

Раскрывая этот определитель, получим $\Delta(\lambda) = \sum_{J_k} [F_{J_k}] e^{\lambda \mu_{J_k}}$. Заметим, что асимптотика $[F_{J_k}]$ имеет место лишь в секторах S. Но в каждом из секторов коэффициенты этих разложений одинаковые.

Определение 1. Оператор L назовем *регулярным*, если выполняются условия 1°–2° и числа F_{J_k}, отвечающие угловым точкам μ_{J_k}, отличны от 0.

Определение 2. Регулярный оператор L назовем *усиленно регулярным*, если нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ асимптотически простые и отделены друг от друга некоторым положительным числом $\delta > 0$.

Необходимые и достаточные условия отделённости корней $\Delta(\lambda)$ в терминах граничных точек μ_{J_k} и соответствующих им чисел F_{J_k} имеются в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рыхлов В. С.* Разложения по собственным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов // Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1981. 129 с.

2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

3. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград : Тип. М. П. Фроловой, 1917. 308 с.

4. *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Result. Math. 1999. V. 36. С. 342–353.

5. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара. им. И. Г. Петровского. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.

УДК 519.4

Д. С. Смирнова

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПО КАЧЕСТВЕННЫМ КРИТЕРИЯМ

Будем рассматривать задачу многокритериальной оптимизации по качественным критериям в виде

$$G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle \,, \tag{1}$$

где A — произволное множество, содержащее не менее двух элементов (множество альтернатив), q_j — j-й критерий, который формально может