УДК 517.51

К. Б. Турашвили

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля:

$$u'' + (\lambda - q(x))u = 0, \tag{1}$$

$$u'(0) - hu(0) = 0, \quad u'(\pi) + Hu(\pi) = 0, \tag{2}$$

где h и H — произвольные действительные числа (причем допускается возможность h, $H = \infty$), а потенциал q ограниченной вариации на отрезке $[0, \pi]$ исчезает в нуле и не обязательно непрерывен.

Теорема 1. *Пусть u_n — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n регулярной задачи Штурма — Лиувилля, $x_{k,n}$ — нули $u_n(x)$. Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:*

1) $h \neq \infty, H \neq \infty$

$$u_n(x) = \gamma(x,n)\cos(n + \frac{c}{n})x + \beta(x)\frac{\sin(n+\frac{c}{n})x}{n+\frac{c}{n}} + O(n^{-2}), \tag{3}$$

$$u'(x) = \beta(x)\cos(n+\frac{c}{n})x - \gamma(x,n)(n+\frac{c}{n})\sin(n+\frac{c}{n})x + O(n^{-1}), \tag{4}$$

$$u''(x) = -(n+\frac{c}{n})^2\gamma(x,n)\cos(n+\frac{c}{n})x - \beta(x)(n+\frac{c}{n})\sin(n+\frac{c}{n})x + O(1),$$

$$u_n'(x_{k,n}) = (-1)^k(n+\frac{c}{n})\gamma(x_{k,n},n) + O(n^{-1}), \tag{5}$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2(n+\frac{c}{n})}\pi + \frac{\beta(x_{k,n})}{\gamma(x_{k,n},n)(n+\frac{c}{n})^2} + O(n^{-3}), \tag{6}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{n} + O(\frac{1}{n^2}), \tag{7}$$

где $\beta(x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau,\ \gamma(x,n) = 1 - \frac{h}{2\lambda_n}\int_0^x q(\tau)d\tau,$

$$c = \frac{1}{\pi}(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau)$$

2) $h = \infty, H \neq \infty$

$$u_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x}{n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})}} + \delta(x,n)\cos(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x + O(n^{-3}),$$

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= \cos(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x + \\ &+ (n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})\delta(x,n)\sin(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n''(x) &= \delta(x,n)(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})^2\cos(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x - \\ &- (n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})\sin(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x + O(n^{-1}), \end{aligned}$$

$$u_n'(x_{k,n}) = (-1)^k\delta(x_{k,n},n)(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})}) + O(n^{-2}),$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})}\pi + \frac{1}{(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})^2\delta(x_{k,n},n)} + O(n^{-4}),$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})} + O(n^{-2}),$$

где $H_1 = H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau,\quad \delta(x,n) = \frac{1}{2\lambda_n}\int_0^x q(\tau)d\tau;$

3) Так как случай $h \neq \infty, H = \infty$ с помощью подстановки $t = \pi - x$ сводится к пункту 2);

4) $h = \infty, H = \infty$

$$u_n(x) = \frac{sin(n + \frac{\alpha_1}{n})x}{n + \frac{\alpha_1}{n}} + \delta(x,n)\cos(n + \frac{\alpha_1}{n})x + O(n^{-3}),$$

$$u_n'(x) = cos(n + \frac{\alpha_1}{n})x + (n + \frac{\alpha_1}{n})\delta(x,n)\sin(n + \frac{\alpha_1}{n})x + O(n^{-2}),$$

$$u''_n(x) = \delta(x,n)(n+\frac{\alpha_1}{n})^2 cos(n+\frac{\alpha_1}{n})x - (n+\frac{\alpha_1}{n})sin(n+\frac{\alpha_1}{n})x + O(n^{-1}),$$

$$u'_n(x_{k,n}) = (-1)^k(n+\frac{\alpha_1}{n})\delta(x_{k.n},n) + O(n^{-2}),$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2(n+\frac{\alpha_1}{n})}\pi + \frac{1}{(n+\frac{\alpha_1}{n})^2\delta(x_{k,n},n)} + O(n^{-4}),$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\alpha_1}{n} + O(n^{-2}),$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(\tau)d\tau, \quad \delta(x,n) = \frac{1}{2\lambda_n}\int_0^x q(\tau)d\tau.$

Доказательства формул для собственных функций и их производных смотрите в [1 – 3].

1) Убедимся в справедливости (6) и (5).

Пусть $x_{k,n}$ — k-й нуль собственной функции $u_n(x)$, имеющий ровно n простых нулей в интервале $(0,\pi)$. Тогда из (3) следует

$$|\gamma(x_{k,n},n)\cos(n+\frac{c}{n})x_{k,n} + \frac{\beta(x_{k,n},n)}{n+\frac{c}{n}}\sin(n+\frac{c}{n})x_{k,n}| = O(\frac{1}{n^2}).$$

Положив

$$\frac{\gamma(x_{k,n},n)(n+\frac{c}{n})}{\sqrt{\gamma^2(x_{k,n},n)(n+\frac{c}{n})^2+\beta^2(x_{k,n},n)}} = \cos\alpha_{k,n},$$

$$\frac{\beta(x_{k,n},n)}{\sqrt{\gamma^2(x_{k,n},n)(n+\frac{c}{n})^2+\beta^2(x_{k,n},n)}} = \sin\alpha_{k,n},$$

получим

$$|\sin(\frac{\pi}{2}+(n+\frac{c}{n})x_{k,n}-\alpha_{k,n})| = O(\frac{1}{n^2}).$$

Другими словами, найдется константа C_1 такая, что

$$-\arcsin\frac{C_1}{n^2}+\pi k \le \frac{\pi}{2}+(n+\frac{c}{n})x_{k,n}-\alpha_{k,n} \le \arcsin\frac{C_1}{n^2}+\pi k.$$

Следовательно, $|\frac{\pi}{2}+(n+\frac{c}{n})x_{k,n}-\alpha_{k,n}-\pi k| = O(\frac{1}{n^2})$. Но $\beta(x,n)$, $\gamma(x,n)\in C^1[0,\pi]$, поэтому

$$x_{k,n} = -\frac{\pi}{2(n+\frac{c}{n})} + \frac{\alpha_{k,n}}{(n+\frac{c}{n})} + \frac{\pi k}{(n+\frac{c}{n})} + O(\frac{1}{n^3}) =$$

$$= \frac{2k-1}{(n+\frac{c}{n})}\pi + \frac{1}{n+\frac{c}{n}}\arcsin\frac{\beta(x_{k,n},n)}{\sqrt{\gamma^2(x_{k,n},n)(n+\frac{c}{n})^2+\beta^2(x_{k,n},n)}} + O(\frac{1}{n^3}) =$$

$$= \frac{2k-1}{2(n+\frac{c}{n})}\pi + \frac{\beta(x_{k,n}, n)}{\gamma(x_{k,n}, n)(n+\frac{c}{n})^2} + O(n^{-3}).$$

Осталось получить (5). Подставим $x_{k,n}$ в (4).

$$u'(x_{k,n}) = \beta(x_{k,n}, n)\sin\pi k + \gamma(x_{k,n}, n)(n+\frac{c}{n})\cos\pi k + O(\frac{1}{n}) =$$

$$= (-1)^k(n+\frac{c}{n})\gamma(x_{k,n}, n) + O(\frac{1}{n}).$$

Таким образом пункт 1 леммы доказан.

Аналогично пункту 1 доказаваются пункты 2, 3 и 4.

Таким образом лемма доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 72–79.

2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию // М. : Наука, 1970.

3. *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001.

УДК 517.984

А. Е. Федосеев

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

В данной статье исследуется обратная задача спектрального анализа для оператора Штурма —Лиувилля на полуоси, имеющего неинтегрируемую особенность во внутренней точке.

Рассмотрим краевую задачу $\mathcal{L}$ вида

$$\ell y = -y'' + \Big(\frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x)\Big)y = \lambda y, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 0$$

на полуоси с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя в точке $a > 0$, где $q(x)$ — комплекснозначная функция, ν_0 — комплексное число. Положим $\lambda = \rho^2$, $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$ и, для определенности, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$, $\operatorname{Re}\nu > 0$,