$$= \frac{2k-1}{2(n+\frac{c}{n})}\pi + \frac{\beta(x_{k,n},n)}{\gamma(x_{k,n},n)(n+\frac{c}{n})^2} + O(n^{-3}).$$

Осталось получить (5). Подставим $x_{k,n}$ в (4).

$$u'(x_{k,n}) = \beta(x_{k,n},n)\sin\pi k + \gamma(x_{k,n},n)(n+\frac{c}{n})\cos\pi k + O(\frac{1}{n}) =$$

$$= (-1)^k(n+\frac{c}{n})\gamma(x_{k,n},n) + O(\frac{1}{n}).$$

Таким образом пункт 1 леммы доказан.

Аналогично пункту 1 доказаваются пункты 2, 3 и 4.

Таким образом лемма доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 72–79.

2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию // М. : Наука, 1970.

3. *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001.

УДК 517.984

А. Е. Федосеев

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

В данной статье исследуется обратная задача спектрального анализа для оператора Штурма —Лиувилля на полуоси, имеющего неинтегрируемую особенность во внутренней точке.

Рассмотрим краевую задачу $\mathcal{L}$ вида

$$\ell y = -y'' + \Big(\frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x)\Big)y = \lambda y, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 0$$

на полуоси с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя в точке $a > 0$, где $q(x)$ — комплекснозначная функция, ν_0 — комплексное число. Положим $\lambda = \rho^2$, $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$ и, для определенности, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$, $\operatorname{Re}\nu > 0$,

$\nu \neq 1, 2, \ldots$ Предположим, что $q(x)|x-a|^{\min(0,1-2Re\,\nu)} \in L(0,T)$ при некотором $T > a$ и $q(x) \in L(T,\infty)$. Уравнение (1) с другими краевыми условиями ранее исследовалось в [1].

Рассмотрим функции

$$C_j(x,\lambda) = (x-a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(\rho(x-a))^{2k},\ j = 1, 2,$$

где

$$\mu_j = (-1)^j \nu + 1/2,\ c_{10}c_{20} = (2\nu)^{-1},$$

$$c_{jk} = (-1)^k c_{j0} \Big(\prod_{s=1}^{k} ((2s+\mu_j)(2s+\mu_j-1)-\nu_0) \Big)^{-1}.$$

Здесь и в дальнейшем $z^{\mu} = \exp(\mu(\ln|z| + i\arg z))$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$. При $x > a$ и $x < a$ функции $C_j(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (1) при $q(x) \equiv 0$. Пусть функции $s_j(x,\lambda)$, $j = 1, 2$, являются решениями следующих интегральных уравнений при $x > a$ и $x < a$:

$$s_j(x,\lambda) = C_j(x,\lambda) + \int_a^x g(x,t,\lambda)q(t)s_j(t,\lambda)\,dt,$$

где $g(x,t,\lambda) = C_1(t,\lambda)C_2(x,\lambda) - C_1(x,\lambda)C_2(t,\lambda)$. При каждом фиксированном x функции $s_j(x,\lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$ и образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Пусть задана матрица $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, $\det A \neq 0$ с комплексными a_{jk}. Введем функции $\{\sigma_j(x,\lambda)\}_{j=1,2}$, $x \in J_- \cup J_+$, $J_\pm = \{\pm(x-a) > 0\}$ по формуле

$$\sigma_j(x,\lambda) = \begin{cases} s_j(x,\lambda), & x \in J_-, \\ \sum\limits_{k=1}^{2} a_{kj}s_k(x,\lambda), & x \in J_+. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $\{\sigma_j(x,\lambda)\}$ будет использоваться для склейки решений в окрестности особой точки $x = a$.

Введем числа ξ_{jk} $(j,k = 1,2)$ по формуле

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin\pi\nu} \begin{bmatrix} -a_{11}e^{2\pi i\nu} + a_{22}e^{-2\pi i\nu} & -i(a_{11}e^{\pi i\nu} - a_{22}e^{-\pi i\nu}) \\ -i(a_{11}e^{\pi i\nu} - a_{22}e^{-\pi i\nu}) & a_{11} - a_{22} \end{bmatrix}.$$

Поведение спектра краевой задачи $\mathcal{L}$ зависит от величин ξ_{jk}. Для определенности в дальнейшем будем рассматривать наиболее важный частный случай, когда $|\xi_{jj}| > |\xi_{12}| > 0$ и $a_{12} = 0$. В этом случае, в отличие от классических операторов Штурма — Лиувилля, дискретный спектр является неограниченным, и возникают новые качественные эффекты при исследовании прямых и обратных задач спектрального анализа.

Обозначим через Π_+ λ — плоскость с двухсторонним разрезом Π_0 вдоль луча $\Lambda_+ := \{\lambda :\ \lambda \geq 0\}$ и положим $\Pi := \overline{\Pi_+} \setminus \{0\}$. Тогда при отображении $\rho \to \rho^2 = \lambda$ множества Π_+, Π_0 и Π соответствуют множествам $\Omega_+ = \{\rho :\ \operatorname{Im}\rho > 0\}$, $\Omega_0 = \{\rho :\ \operatorname{Im}\rho = 0\}$ и $\Omega = \{\rho :\ \operatorname{Im}\rho \geq 0,\ \rho \neq 0\}$. Пусть $e(x, \rho)$, $x \geq 0, \operatorname{Im}\rho \geq 0$ — разрывное решение Йоста, введенное в [1], для уравнения (1). Обозначим $S_{k_0} = \left\{\rho :\ \arg\rho \in \left(\frac{k_0\pi}{2}, \frac{(k_0+1)\pi}{2}\right)\right\}$, $k_0 = 0, 1$ и

$$\Delta(\rho) = e(0, \rho), \quad \operatorname{Im}\rho \geq 0.$$

Функция $\Delta(\rho)$ называется характеристической функцией краевой задачи $\mathcal{L}$ и имеет счетное множество нулей вида

$$\rho_k = \rho_k^{\pm} + O(k^{-1}), \quad k \to \pm\infty,$$

где $\rho_k^{\pm} = \frac{\pi}{a}(k + \theta_{\pm})$ — нули функций

$$\Delta^{\pm}(\rho) = \xi_{12} - \xi_{jj}\exp(2i\rho a),\ \rho \in S_{2-j},\ j = 1, 2,$$

и

$$\theta_{\pm} = -\frac{i}{2\pi}\ln\left|\frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}}\right| + \frac{1}{2\pi}\arg\left(\frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}}\right)$$

(“ $-$ ” при $j = 1$, “ $+$ ” при $j = 2$). Для определенности пусть $\arg\left(\frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}}\right) \in [0, 2\pi)$. Обозначим $\Lambda = \{\lambda = \rho^2 :\ \rho \in \Omega,\ \Delta(\rho) = 0\}$, $\Lambda' = \{\lambda = \rho^2 :\ \rho \in \Omega_+, \Delta(\rho) = 0\}$, $\Lambda'' = \{\lambda = \rho^2 :\ \rho \in \Omega_0,$ $\rho \neq 0, \Delta(\rho) = 0\}$. Тогда $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$, Λ' — счетное неограниченное множество и Λ'' — ограниченное множество. Положим

$$\Phi(x, \lambda) = e(x, \rho)/\Delta(\rho), \quad M(\lambda) := \Phi'(0, \lambda).$$

Функция $\Phi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям $\Phi(0, \lambda) = 1$, $\Phi(x, \lambda) = O(\exp(i\rho x))$, $x \to \infty$, $\rho \in \Omega$ и называется *решением Вейля* для $\mathcal{L}$. Функцию $M(\lambda)$ будем называть *функцией Вейля* для $\mathcal{L}$. Пусть заданы фиксированные матрица A и число ν_0.

Задача 1. *По заданной функции Вейля $M(\lambda)$ построить функцию $q(x)$.*

Функция Вейля $M(\lambda)$ является аналитической в $\Pi_+ \setminus \Lambda'$ и непрерывной в $\Pi \setminus \Lambda$. Множество особенностей $M(\lambda)$ (как аналитической функции) совпадает с множеством $\Lambda_0 := \Lambda_+ \cup \Lambda$. Введем область

$$G_\delta := \{\rho :\ \operatorname{Im}\rho \geq 0,\ |\rho - \rho_k| \geq \delta,\ \rho_k \in \Lambda\}.$$

Функция Вейля имеет следующую асимптотику при $|\lambda| \to \infty$, $\rho \in G_\delta \cap \overline{S}_{2-j}$, $j = 1, 2$:

$$M(\lambda) = i\rho\Big(M_0^{\pm}(\lambda) + O\big(\frac{1}{\rho}\big)\Big), \tag{2}$$

$$M_0^{\pm}(\lambda) = \frac{\xi_{12} + \xi_{jj}\exp(2i\rho a)}{\xi_{12} - \xi_{jj}\exp(2i\rho a)},$$

где “ $-$ ” соответствует $j = 1$, “ $+$ ” соответствует $j = 2$.

Теорема 1. *Функция Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет краевую задачу $\mathcal{L}$.*

Доказательство теоремы дает процедуру решения обратной задачи 1. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости. При этом используются и развиваются идеи метода спектральных отображений [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* О восстановлении сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов с особенностью внутри интервала // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 645–659.

2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

УДК 517.984

В. А. Халова

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ РАВНОСХОДИМОСТИ

Пусть A — оператор вида

$$Af = \int\limits_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x), t) f(t)\, dt,$$

где ядро $A(x,t)$ непрерывно по x и t вместе с производными A_x, A_t, A_{xt}, A_{x^2t}, A_{xt^2} $\Big(A_{x^st^j} = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)\Big)$ при $0 \le t \le x$ и $A(x,x) \equiv 1$, функция

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}x + 1, & x \in [0,\gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(x-1), & x \in [\gamma, 1], \end{cases} \quad \gamma < 1/2,$$