Функция Вейля имеет следующую асимптотику при $|\lambda| \to \infty$, $\rho \in G_\delta \cap \overline{S}_{2-j}$, $j = 1, 2$:

$$M(\lambda) = i\rho\Big(M_0^{\pm}(\lambda) + O\big(\frac{1}{\rho}\big)\Big), \qquad (2)$$

$$M_0^{\pm}(\lambda) = \frac{\xi_{12} + \xi_{jj}\exp(2i\rho a)}{\xi_{12} - \xi_{jj}\exp(2i\rho a)},$$

где " $-$ " соответствует $j = 1$, " $+$ " соответствует $j = 2$.

Теорема 1. *Функция Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет краевую задачу $\mathcal{L}$.*

Доказательство теоремы дает процедуру решения обратной задачи 1. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости. При этом используются и развиваются идеи метода спектральных отображений [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* О восстановлении сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов с особенностью внутри интервала // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 645–659.

2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

УДК 517.984

В. А. Халова

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ РАВНОСХОДИМОСТИ

Пусть A — оператор вида

$$Af = \int\limits_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x), t) f(t)\, dt,$$

где ядро $A(x,t)$ непрерывно по x и t вместе с производными A_x, A_t, A_{xt}, A_{x^2t}, A_{xt^2} $\left(A_{x^st^j} = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)\right)$ при $0 \le t \le x$ и $A(x,x) \equiv 1$, функция

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma} x + 1, & x \in [0,\gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(x-1), & x \in [\gamma, 1], \end{cases} \quad \gamma < 1/2,$$

непрерывна, монотонно убывает, $\vartheta(0) = 1$, $\vartheta(1) = 0$, $\vartheta^2(x) = \vartheta(\vartheta(x)) \equiv x$. Таким образом, $\vartheta(x)$ — инволюция, производная которой имеет разрыв при $x = \gamma$, что создает дополнительные трудности в изучении сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям. Случай, когда инволюция $\vartheta(x)$ — произвольная трижды непрерывно дифференцируемая на $[0, 1]$ функция и $\vartheta'(x) < 0$, был рассмотрен в статье [1]. Для этого оператора была установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$.

В настоящей статье получена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям операторов

$$A_1 = TAT^{-1} \qquad \text{и} \qquad A_2 f = \int\limits_0^{1-x} \varphi'(t) f(t)\, dt.$$

Здесь $Tf = f(\varphi(\tau))$, $\varphi(\tau)$ — непрерывная, монотонно возрастающая на отрезке $[0, 1]$ функция следующего вида:

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 2\gamma\tau, & \tau \le 1/2, \\ 2(1-\gamma)\tau + 2\gamma - 1, & \tau \ge 1/2. \end{cases} \tag{1}$$

Лемма 1. *Справедлива формула* $\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(\tau))) = 1 - \tau$.

Доказательство. В силу (1) имеем

$$\vartheta(\varphi(\tau)) = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}\varphi(\tau) + 1, & \varphi(\tau) \in [0, \gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(\varphi(\tau) - 1), & \varphi(\tau) \in [\gamma, 1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma} 2\gamma\tau + 1, & \tau \le 1/2, \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}[2(1-\gamma)\tau + 2\gamma - 1 - 1], & \tau \ge 1/2 \end{cases} = \begin{cases} 2(\gamma-1)\tau + 1, & \tau \le 1/2, \\ 2\gamma(1-\tau), & \tau \ge 1/2. \end{cases}$$

Учитывая, что $\varphi^{-1}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\xi, & \xi \in [0, \gamma], \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\xi + 1 - 2\gamma], & \xi \in [\gamma, 1], \end{cases}$ получаем:

$$\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(\tau))) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\vartheta(\varphi(\tau)), & \vartheta(\varphi(\tau)) \in [0, \gamma], \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\vartheta(\varphi(\tau)) + 1 - 2\gamma], & \vartheta(\varphi(\tau)) \in [\gamma, 1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\vartheta(\varphi(\tau)), & \tau \ge 1/2, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\vartheta(\varphi(\tau)) + 1 - 2\gamma], & \tau \le 1/2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}[-2\gamma\tau + 2\gamma], & \tau \ge 1/2, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[2(\gamma-1)\tau + 1 + 1 - 2\gamma], & \tau \le 1/2 \end{cases} = 1 - \tau.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Справедлива формула* $A_1 f = \int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t) f(t)\,dt$, *где* $A_1(x,t) = A(\varphi(x),\varphi(t))\varphi'(t)$.

Доказательство. Имеем

$$AT^{-1}f = \int\limits_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x),t) f(\varphi^{-1}(t))\,dt. \tag{2}$$

Выполним в интеграле (2) замену переменных $\tau = \varphi^{-1}(t)$:

$$AT^{-1}f = \int\limits_0^{\varphi^{-1}(\vartheta(x))} A(\vartheta(x),\varphi(\tau))\varphi'(\tau) f(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получаем

$$TAT^{-1}f = \int\limits_0^{\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(x)))} A(\vartheta(\varphi(x)),\varphi(\tau))\varphi'(\tau) f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{1-x} A(\varphi(\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(x)))),\varphi(\tau))\varphi'(\tau) f(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t) f(t)\,dt.$$

Лемма доказана. □

Обозначим $R_{1,\lambda} = (E-\lambda A_1)^{-1}A_1$ и $R_{2,\lambda} = (E-\lambda A_2)^{-1}A_2$.

Лемма 3. *Если* $y = R_{1,\lambda} f$, *то*

$$-(E+N)\left(\frac{1}{\varphi'(x)} y'(1-x)\right) - \lambda y(x) = f(x), \quad y(1) = 0,$$

где $(E+N) = (E+N_1)^{-1}$, $N_1 f = \int\limits_0^x N_1(x,t) f(t)\,dt$ *и* $N_1(x,t) = \frac{1}{\varphi'(x)} A'_{1x}(x,t)$.

Доказательство. Пусть $y = R_{1,\lambda} f$. Тогда

$$y(x) - \lambda \int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t) y(t)\,dt = \int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t) f(t)\,dt. \tag{3}$$

Отсюда справедливость условия $y(1) = 0$ очевидна.

Далее, выполнив в (3) замену x на $1-x$, продифференцировав по x и разделив почленно на $\varphi'(x)$, получим

$$-\frac{1}{\varphi'(x)}y'(1-x)-\lambda\left[y(x)+\int\limits_0^x N_1(x,t)y(t)\,dt\right]=f(x)+\int\limits_0^x N_1(x,t)f(t)\,dt.$$

Применив оператор $(E+N)$, приходим к утверждению леммы. □

Лемма 4. *Если $y=R_{2,\lambda}f$, то*

$$-\frac{1}{\varphi'(x)}y'(1-x)-\lambda y(x)=f(x),\quad y(1)=0.$$

Эта лемма очевидна.

Действуя так же, как и в работе [2], получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любой $f(x)\in L[0,1]$ имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\lambda|=r}[R_{1,\lambda}-R_{2,\lambda}]f\,d\lambda\right\|_\infty=0,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_\infty[0,1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270*).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П., Кувардина Л. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией // Известия вузов. Сер. Математика. 2008. № 5. С. 67–76.

2. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции. : Информац-й бюллетень. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55.

УДК 519.624

А. А. Хромов

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ОПЕРАТОРОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для указанного уравнения приведен метод его приближенного решения в случае, когда точное решение удовдетворяет интегральному условию.

Рассматривается уравнение

$$Au\equiv\int_0^x u(t)dt=f(x). \qquad (1)$$