Далее, выполнив в (3) замену $x$ на $1-x$, продифференцировав по $x$ и разделив почленно на $\varphi'(x)$, получим

$$-\frac{1}{\varphi'(x)}y'(1-x)-\lambda\left[y(x)+\int\limits_0^x N_1(x,t)y(t)\,dt\right]=f(x)+\int\limits_0^x N_1(x,t)f(t)\,dt.$$

Применив оператор $(E+N)$, приходим к утверждению леммы. □

**Лемма 4.** *Если* $y=R_{2,\lambda}f$, *то*

$$-\frac{1}{\varphi'(x)}y'(1-x)-\lambda y(x)=f(x),\quad y(1)=0.$$

Эта лемма очевидна.

Действуя так же, как и в работе [2], получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Для любой* $f(x)\in L[0,1]$ *имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\lambda|=r}[R_{1,\lambda}-R_{2,\lambda}]f\,d\lambda\right\|_\infty=0,$$

*где* $\|\cdot\|$ *— норма в* $L_\infty[0,1]$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект* 10-01-00270*).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П., Кувардина Л. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией // Известия вузов. Сер. Математика. 2008. № 5. С. 67–76.

2. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции. : Информац-й бюллетень. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55.

УДК 519.624

**А. А. Хромов**

# О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ОПЕРАТОРОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для указанного уравнения приведен метод его приближенного решения в случае, когда точное решение удовдетворяет интегральному условию.

Рассматривается уравнение

$$Au\equiv\int_0^x u(t)dt=f(x). \tag{1}$$

Предполагается, что оператор $A$ действует в пространстве C[0,1], точное решение $u(x)$ удовлетворяет условию

$$U(u) \equiv \int_0^1 u(t)dt = 0, \qquad (2)$$

а правая часть $f(x)$ задана ее приближением $f_\delta(x) : \|f_\delta(x) - f(x)\| \leq \delta$.

Решается задача нахождения по $f_\delta(x)$ и $\delta$ приближенного решения уравнения (1) такого, которое удовлетворяет условию (2). Рассмотрим семейство операторов $R_r, r > 0$ из [1].

**Лемма 1.** Имеет место представление

$$R_r u = \int_0^1 K_r(x,t)u(t)dt = 0,$$

где

$$K_r(x,t) = -(1-e^{-r})^{-1}e^{r(x-t)} \left\{ \begin{array}{ll} e^{-r}, & t \leq x, \\ 1, & t > x. \end{array} \right\}$$

**Доказательство.** следует из леммы 1 в [1].
Построим семейство операторов

$$T_r f = -rR_r A^{-1} f.$$

**Лемма 2.** Имеет место представлление

$$T_r f = -r^2 \int_0^1 K_r(x,t)f(t)dt - rf(x). \qquad (3)$$

**Доказательство.** Имеем: $A^{-1}f = f', f(0) = 0$. Отсюда $R_r A^{-1} f = R_r f' = \int_1^0 K_r(x,t)f'(t)dt$.

Берем этот интеграл по частям. Получаем

$$R_r f' = [K_r(x,t)f(t)]_0^x + [K_r(x,t)f(t)]_x^1 - \int_0^1 K'_{rt}(x,t)f(t)dt =$$
$$= [K_r(x,x-0) - K_r(x,x+0)] \cdot f(x) - K_r(x,0)f(0) +$$
$$K_r(x,1)f(1) - \int_0^1 K'_{rt}(x,t)f(t)dt.$$

Поскольку скачок ядра $K_r(x,t)$ при $t = x$ равен 1, $f(0) = 0, f(1) \equiv \int_0^1 u(t)dt = 0$, а $K'_{rt}(x,t) = -rK_r(x,t)$, то отсюда следует, что $R_r f' = f(x) + r\int_0^1 K_r(x,t)f(t)dt$. Из последнего равенства вытекает утверждение леммы.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, T_r, u) \equiv \sup \{\|T_r f_\delta - u\| : \|f_\delta - f\| \le \delta\}$$

Известно [2], что для ее стремления к нулю при $r \to \infty$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно: 1) сходимости

$$\|T_r Au - u\| \to \infty \text{ при } r \to \infty, \tag{4}$$

2) согласования

$$r = r(\delta), \text{ при котором } r(\delta) \to \infty \, \left\|T_{r(\delta)}\right\| \delta \to \infty \text{ при } \delta \to 0.$$

**Лемма 3.** Для сходимоости (4) необходимо и достаточно, чтобы функция $u(x)$ удовлетворяла условию (2) и условию $u(0) = u(1)$.

**Доказательство** вытекает из равенства $T_r A = -rR_r$ и следствия из теоремы 2 в [1].

**Лемма 4.** Справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{r}{2}(1 - e^{-r}) \le \|T_r\| \le 2r. \tag{5}$$

**Доказательство.** Обозначим через $K_r$ интегральный оператор в выражении (3). Очевидно, справедлива оценка

$$\|T_r f\| \le \|K_r\| \, \|f\| + r \, \|f\| \, .$$

Далее, имеем

$$\|K_r\| = r^2 \max_{0 \le x \le 1} \int_0^1 |K_r(x, t)| \, dt.$$

Отсюда вытекает правая часть оценки (5). Для получения оценки снизу пользуемся оценкой:

$$\|K_r\| \ge \|T_r f_0\| \ge |T_r f_0|_{x=0} \, ,$$

где $f_0(x) = e^{-rx}$.

Из лемм 3 и 4 следует

**Теорема**. Сходимость $\Delta(\delta, T_r, u) \to 0$ при $r \to \infty$, $\delta \to 0$ имеет место тогда и только тогда, когда функция $u(x)$ удовлетворяет условию (2) и условию $u(0) = u(1)$, а $r = r(\delta)$ такое, что $r(\delta) \to \infty$ и $r(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* О построении приближений к непрерывным функциям с интегральными граничными условиями// ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51, № 8. С. 1370–1375.

2. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода// Дифференциальные уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.

УДК 517.51

**А. П. Хромов, Г. В. Хромова**

## ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

В работе [1] рассмотрен простой по конструкции оператор, полученный из оператора Стеклова, с разрывной в точке $x = 1/2$ областью значений, обеспечивающий равномерную сходимость к произвольной непрерывной функции на всем отрезке $[0, 1]$ (в отличие от классического оператора Стеклова). В [1] сформулирована теорема, в которой получена двусторонняя неулучшаемая по порядку оценка погрешности приближений к функциям из класса Липшица, причем, с лучшими константами и более простым доказательством по сравнению с другим модифицированным оператором Стеклова из [2].

Операторы из [1] имеют вид

$$T_h\, u = \begin{cases} \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} u(t)\,dt \equiv T_{2h}u, & x \in [0, 1/2]\,; \\ \frac{1}{h}\int\limits_{x-h}^{x} u(t)\,dt \equiv T_{1h}u, & x \in [1/2, 1]\,. \end{cases} \tag{1}$$

Функция $T_h\, u$ рассматривается как элемент пространства $L_\infty[0, 1]$ с нормой: $\|\cdot\|_\infty = \max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}\,, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}$.

Рассматриваются величины:

$$\Delta\left(\delta, T_h, Lip_1 1\right) = \sup\left\{\|T_h u_\delta - u\|_\infty : u \in Lip_1 1, \|u_\delta - u\|_{L_2[0,1]} \le \delta\right\},$$

$$\Delta_1\left(T_h, Lip_1 1\right) = \sup\left\{\|T_h u - u\|_\infty : u \in Lip_1 1\right\}.$$

**Лемма.** *Справедлива оценка*