Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* О построении приближений к непрерывным функциям с интегральными граничными условиями// ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51, № 8. С. 1370–1375.

2. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода// Дифференциальные уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.

УДК 517.51

А. П. Хромов, Г. В. Хромова

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

В работе [1] рассмотрен простой по конструкции оператор, полученный из оператора Стеклова, с разрывной в точке $x = 1/2$ областью значений, обеспечивающий равномерную сходимость к произвольной непрерывной функции на всем отрезке $[0, 1]$ (в отличие от классического оператора Стеклова). В [1] сформулирована теорема, в которой получена двусторонняя неулучшаемая по порядку оценка погрешности приближений к функциям из класса Липшица, причем, с лучшими константами и более простым доказательством по сравнению с другим модифицированным оператором Стеклова из [2].

Операторы из [1] имеют вид

$$T_h u = \begin{cases} \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} u(t)\,dt \equiv T_{2h}u, & x \in [0, 1/2]\,; \\ \frac{1}{h}\int\limits_{x-h}^{x} u(t)\,dt \equiv T_{1h}u, & x \in [1/2, 1]\,. \end{cases} \tag{1}$$

Функция $T_h u$ рассматривается как элемент пространства $L_\infty[0, 1]$ с нормой: $\|\cdot\|_\infty = \max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}$.

Рассматриваются величины:

$$\Delta(\delta, T_h, Lip_1 1) = \sup\left\{\|T_h u_\delta - u\|_\infty : u \in Lip_1 1, \|u_\delta - u\|_{L_2[0,1]} \le \delta\right\},$$

$$\Delta_1(T_h, Lip_1 1) = \sup\left\{\|T_h u - u\|_\infty : u \in Lip_1 1\right\}.$$

Лемма. *Справедлива оценка*

$$\Delta\left(\delta, T_h, Lip_1 1\right) \geq max\left\{\Delta_1\left(T_h, Lip_1 1\right), \delta \left\|T_h\right\|_{L_2\to L_\infty}\right\}.$$

Доказательство вытекает из двух оценок:

$$\Delta_1\left(T_h, Lip_1 1\right) \leq \Delta\left(\delta, T_h, Lip_1 1\right),$$
$$\delta \left\|T_h\right\|_{L_2\to L_\infty} \leq \Delta\left(\delta, T_h, Lip_1 1\right),$$

которые следуют из равенств

$$\Delta_1\left(T_h, Lip_1 1\right) = \Delta_{|\delta=0},\ \ \delta \left\|T_h\right\|_{L_2\to L_\infty} = \Delta_{|u=0}.$$

Теорема. *Справедлива двусторонняя оценка*

$$\delta^{2/3} \leq \Delta\left(\delta, T_{h(\delta)}, Lip_1 1\right) \leq 3/2\, \delta^{2/3} \tag{2}$$

где $h(\delta) = \delta^{2/3}$.

Доказательство. Для $\Delta\left(\delta, T_h, Lip_1 1\right)$ справедлива оценка

$$\Delta\left(\delta, T_h, Lip_1 1\right) \leq \Delta_1\left(T_h, Lip_1 1\right) + \delta \left\|T_h\right\|_{L_2\to L_\infty}. \tag{3}$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\left\|T_h\right\|_{L_2\to L_\infty} = \frac{1}{\sqrt{h}}. \tag{4}$$

Найдем выражение для $\Delta_1\left(T_h, Lip_1 1\right)$, используя определение класса Липшица. Имеем

$$|T_{1h}\, u - u| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_{x-h}^{x} |u(t) - u(x)|\ dt\right| \leq \frac{1}{h}\int\limits_{x-h}^{x} (x-t)\, dt = \frac{h}{2}.$$

Такая же оценка справедлива для $|T_{2h}\, u - u|$.

Отсюда следует оценка

$$\Delta_1\left(T_h, Lip_1 1\right) \leq \frac{h}{2}.$$

Она достигается на функции $u_0(x) = x$. Отсюда вытекает равенство

$$\Delta_1\left(T_h, Lip_1 1\right) = \frac{h}{2}. \tag{5}$$

Подставив (4) и (5) в (3), придем к оценке

$$\Delta\left(\delta, T_h, Lip_1 1\right) \le \frac{h}{2} + \frac{\delta}{\sqrt{h}}. \quad (6)$$

Выбирая $h = h(\delta)$ из условия минимума правой части оценки (6) и подставляя это $h(\delta)$ в (6), получаем оценку сверху в (2).

Из (4), (5) и леммы при $h = h(\delta)$ получаем оценку снизу в (2).

Теорема доказана.

Замечание. Если вместо T_h рассмотреть модифицированный оператор Стеклова $\tilde{S}_h$ из [2] и провести рассуждения по той же схеме, то придем к оценке

$$2^{-1/3}\delta^{2/3} \le \Delta\left(\delta, \tilde{S}_h, Lip_1 1\right) \le 3 \cdot 2^{-1/3}\delta^{2/3}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 15-й Сарат. зим. школы. Саратов, 27 янв.-3 февр. 2010 г. Саратов : : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.

2. *Хромова Г. В.* О задаче восстановления функций // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.

УДК 517.51

О. И. Шаталина

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А. Н. ТИХОНОВА В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В данной статье рассматривается задача восстановления непрерывной функции $\overline{u}(x)$, заданной ее δ-приближением $u_\delta(x)$ в метрике пространства $L_2[0,1]$. Приближенное решение этой задачи находится методом регуляризации А. Н. Тихонова, которому соответствует множество операторов T_α [1]. По Тихонову точное решение должно принадлежать пространству $W_2^1[0,1]$. Но в [2] доказано, что это ограничение можно снять, и сходимость приближенных решений имеет место для любой непрерывной функции $\overline{u}(x)$. При этом берется случай, когда функционал Тихонова представим в виде

$$M_\delta^\alpha[u, u_\delta] = \|u - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\|u\|_{W_2^1}^2, \alpha > 0. \quad (1)$$