УДК 517.984

В. А. Юрко

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА // ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ // С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В статье рассматриваются дифференциальные операторы второго порядка с постоянным запаздыванием. Исследуется обратная спектральная задача восстановления операторов по их спектрам. Дифференциальные уравнения с запаздыванием возникают в различных задачах математики и приложениях (см. [1, 2] и литературу в них). Обратные спектральные задачи для классических операторов Штурма — Лиувилля изучены достаточно подробно [3]. Наличие запаздывания в математической модели приводит к существенным качественным изменениям в исследовании обратных задач спектрального анализа, и в настоящее время отсутствуют серьезные результаты в этом направлении.

Пусть $\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1}$, $(j = 0, 1)$ – собственные значения краевых задач $L_j(q)$:

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x),\ x \in (0,\pi),\ y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \quad (1)$$

где $q(x) \in L(a,\pi)$, $a \in (0,\pi)$ и $q(x) \equiv 0$ при $x \in [0,a]$. Пусть $N \in \mathcal{N}$ такое, что $aN < \pi \leq a(N+1)$. Пусть $S(x,\lambda)$ – решение уравнения (1) при условиях $S(0,\lambda)) = 0,\ S'(0,\lambda) = 1$. Тогда

$$S(x,\lambda) = S_0(x,\lambda) + S_1(x,\lambda) + \ldots + S_N(x,\lambda), \quad (2)$$

где $S_0(x,\lambda) = \dfrac{\sin\rho x}{\rho},\ x \geq 0,\ \lambda = \rho^2$,

$$\begin{gathered} S_k(x,\lambda) = \int_{ka}^{x} \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q(t) S_{k-1}(t-a,\lambda)\,dt, \\ x \geq ka, S_k(x,\lambda) = 0,\ x \leq ka, \end{gathered} \quad (3)$$

при $k \geq 1$. В частности,

$$S_1(x,\lambda) = -\frac{\cos\rho(x-a)}{2\rho^2}\int_a^x q(t)\,dt + \frac{1}{2\rho^2}\int_a^x q(t)\cos\rho(2t-x-a)\,dt. \quad (4)$$

Используя (3),(4), можно показать по индукции, что

$$S_k^{(j)}(x,\lambda) = O(\rho^{j-k-1}\exp(|Im\,\rho|(x-ka))), \quad |\rho|\to\infty,\ x\ge ka. \tag{5}$$

Обозначим $\Delta_j(\lambda) := S^{(j)}(\pi,\lambda),\ j = 0,1$. Функции $\Delta_j(\lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$. Нули $\Delta_j(\lambda)$ совпадают с собственными значениями $\{\lambda_{nj}\}_{n\ge1}$ задач $L_j(q)$. Функция $\Delta_j(\lambda)$ называется характеристической функцией задачи $L_j(q)$. Учитывая (2), (4) и (5), выводим следующие асимптотические формулы при $|\rho|\to\infty$:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_0(\lambda) = {} & \frac{\sin\rho\pi}{\rho} - \frac{\cos\rho(\pi-a)}{2\rho^2}\int_a^\pi q(t)\,dt + \\ & +o\Big(\frac{1}{\rho^2}\exp(|Im\,\rho|(\pi-a))\Big),\\ \Delta_1(\lambda) = {} & \cos\rho\pi + \frac{\sin\rho(\pi-a)}{2\rho^2}\int_a^\pi q(t)\,dt + \\ & +o\Big(\frac{1}{\rho}\exp(|Im\,\rho|(\pi-a))\Big).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Используя (6), получаем асимптотические формулы для собственных значений $\lambda_{nj} = \rho_{nj}^2$ при $n\to\infty$:

$$\left.\begin{aligned}\rho_{n0} &= n + \frac{\cos na}{2\pi n}\int_a^\pi q(t)\,dt + o\Big(\frac{1}{n}\Big),\\ \rho_{n1} &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big) + \frac{\cos(n-1/2)a}{2\pi n}\int_a^\pi q(t)\,dt + o\Big(\frac{1}{n}\Big).\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Лемма 1. *Задание спектра $\{\lambda_{nj}\}_{n\ge1}$, $j=0,1$, однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_j(\lambda)$ по формуле*

$$\Delta_0(\lambda) = \pi\prod_{n=1}^\infty \frac{\lambda_{n0}-\lambda}{n^2}, \quad \Delta_1(\lambda) = \prod_{n=1}^\infty \frac{\lambda_{n1}-\lambda}{(n-1/2)^2}.$$

Обозначим $\mathcal{L}(\rho) := \Delta_1(\lambda) + i\rho\Delta_0(\lambda)$. Функция $\mathcal{L}(\rho)$ является характеристической функцией для краевой задачи типа Редже $L(q)$ для уравнения (1) с краевыми условиями $y(0) = y'(\pi) + i\rho y(\pi) = 0$. Из (2) следует, что

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathcal{L}_0(\rho) + \mathcal{L}_1(\rho) + \ldots + \mathcal{L}_N(\rho), \tag{8}$$

где $\mathcal{L}_k(\rho) = S_k'(\pi,\lambda) + i\rho S_k(\pi,\lambda)$. В частности, $\mathcal{L}_0(\rho) = \exp(i\rho\pi)$. Используя (3), вычисляем

$$\mathcal{L}_k(\rho) = \int_{ka}^\pi \exp(i\rho(\pi-t))q(t)S_{k-1}(t-a,\lambda)\,dt, \quad k\ge1. \tag{9}$$

Кроме того, из (4) вытекает, что

$$\mathcal{L}_1(\rho)=\frac{\exp(i\rho(\pi-a))}{2i\rho}\int_a^\pi q(t)\,dt-\frac{\exp(i\rho(\pi+a))}{2i\rho}\int_a^\pi q(t)\exp(-2i\rho t)\,dt. \tag{10}$$

Учитывая (9) и (5), получаем

$$\mathcal{L}_k(\rho)=O\Big(\frac{1}{\rho^k}\int_{ka}^\pi q(t)\exp(-i\rho(2t-\pi-ka))\,dt\Big),$$
$$Im\,\rho\ge 0,\ |\rho|\to\infty,\ k\ge 1.$$

Пусть $\{\tilde\lambda_{nj}\}_{n\ge 1},\ j=0,1$ – собственные значения краевых задач $\tilde L_j=L_j(\tilde q)$ с $\tilde q(x)\equiv 0$. Обозначим $\tilde{\mathcal{L}}(\rho)$ – характеристическая функция для $\tilde L=L(\tilde q)$.

Теорема 1. *Если $\lambda_{nj}=\tilde\lambda_{nj}$ при всех $n\ge 1,\ j=0,1,$ то $q(x)=0$ п.в. на (a,π).*

Доказательство. В силу леммы 1 имеем $\mathcal{L}(\rho)=\exp(i\rho\pi)$. Используя (8), выводим

$$\mathcal{L}_1(\rho)=-\mathcal{L}^+(\rho),\ \mathcal{L}^+(\rho):=\sum_{k=2}^N\mathcal{L}_k(\rho). \tag{11}$$

Из (7) следует, что $\displaystyle\int_a^\pi q(t)\,dt=0$. Вместе с (10) это дает

$$\mathcal{L}_1(\rho)=-\frac{\exp(i\rho(\pi+a))}{2i\rho}\int_a^\pi q(t)\exp(-2i\rho t)\,dt.$$

При $N=1$ теорема очевидна. Ниже будем предполагать, что $N\ge 2$.

Лемма 2. *Если $q(x)=0$ п.в. на $(2a,\pi)$, то $q(x)=0$ п.в. на (a,π).*

В самом деле, пусть $q(x)=0$ п.в. на $(2a,\pi)$. Тогда в силу (9) $\mathcal{L}_k(\rho)\equiv 0$ при $k\ge 2$, поэтому $\mathcal{L}^+(\rho)\equiv 0$. Вместе с (11) это дает $\mathcal{L}_1(\rho)\equiv 0$, и следовательно, $q(x)=0$ п.в. на (a,π).

Для определенности предположим, что $N=2M+1,\ M\ge 1$, т.е. N нечетно (случай четного N требует небольших технических изменений).

Лемма 3. *Зафиксируем $\nu=\overline{0,2M-1}$. Если $q(x)=0$ п.в. на интервале $(\pi-\nu a/2,\pi)$, то $q(x)=0$ п.в. на интервале $(\pi-(\nu+1)a/2,\pi)$.*

Применяя лемму 3 последовательно при $\nu=0,1,\dots,2M-1$, получаем, что $q(x)=0$ п.в. на интервале $(\pi-Ma,\pi)$.

Лемма 4. *Если* $q(x) = 0$ *п.в. на интервале* $(\pi - Ma, \pi)$, *то* $q(x) = 0$ *п.в. на интервале* $((M+2)a/2, \pi)$.

Если $M = 1$ или $M = 2$, то мы доказали, что $q(x)$ п.в. на $(2a, \pi)$. Согласно лемме 2 заключаем, что $q(x)$ п.в. на (a, π). Итак, теорема 1 доказана для $M = 1$ и $M = 2$. Пусть теперь $M \geq 3$. Зафиксируем $\nu = \overline{5, M+2}$. Обозначим $s := [(\nu+1)/2]$. Ясно, что $s < \nu$.

Лемма 5. *Если* $q(x) = 0$ *п.в. на интервале* $(\nu a/2, \pi)$, *то* $q(x) = 0$ *п.в. на интервале* $(sa/2, \pi)$.

Применяя лемму 5 последовательно несколько раз, начиная с $\nu = M + 2$, приходим к соотношению $q(x) = 0$ п.в. на $(2a, \pi)$. Тогда, в силу леммы 2, $q(x) = 0$ п.в. на интервале (a, π). Теорема 1 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hale J.* Theory of functional-differential equations. Springer-Verlag, New-York : 1977.

2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М. : Наука, 1972.

3. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.