УДК 519.83

Т.Ф. Савина

ГОМОМОРФИЗМЫ И КОНГРУЭНТНОСТИ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Игра двух игроков с отношениями предпочтения определяется как система объектов
$$G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F\rangle,$$
где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, A — множество исходов, ρ_i — отношение предпочтения игрока i, $i = 1, 2$, заданное на A, F — отображение множества ситуаций $X \times Y$ в множество исходов A.

Пусть теперь, кроме игры G, задана еще одна игра с отношениями предпочтения тех же игроков $\Gamma = \langle U, V, B, \sigma_1, \sigma_2, \Phi\rangle$.

Определение 1. Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1 \colon X \to U$, $\varphi_2 \colon Y \to V$, $\psi \colon A \to B$, называется *гомоморфизмом игры G в игру Γ*, если для $i = 1, 2$ выполняются следующие условия:

$$a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2), \quad (i = 1, 2), \tag{$H1$}$$

$$\psi \circ F = \Phi \circ (\varphi_1 \Box \varphi_2). \tag{$H2$}$$

Определение 2. Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1 \colon X \to U$, $\varphi_2 \colon Y \to V$, $\psi \colon A \to B$, называется *строгим гомоморфизмом игры G в игру Γ*, если выполняются следующие условия (здесь ρ_i^* есть строгая часть, а ρ_i^s — симметричная часть отношения ρ_i):

$$a_1 \overset{\rho_i^*}{<} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i^*}{<} \psi(a_2), \quad (i = 1, 2), \tag{$H1a$}$$

$$a_1 \overset{\rho_i^s}{\sim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i^s}{\sim} \psi(a_2) \quad (i = 1, 2) \tag{$H1b$}$$

и условие (H2).

Ясно, что строгий гомоморфизм является гомоморфизмом, но обратное неверно.

Если φ_1 — отображение X на U, φ_2 — отображение Y на V (т.е. эти отображения являются сюръекциями), то гомоморфизм $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ называется сюръективным или гомоморфизмом игры G на игру Γ. Если же отображения φ_1, φ_2 и ψ являются биекциями и выполняется условие

$$a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \;\Leftrightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

то гомоморфизм $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ называется *изоморфизмом игры G на игру* Γ. Две игры с отношениями предпочтения называются *изоморфными*, если существует изоморфизм одной из них на другую. Если отображения φ_1, φ_2 и ψ инъективны и в условии (1) вместо $\Leftrightarrow$ выполнена импликация $\Rightarrow$, то будем говорить, что *первая игра изоморфно вкладывается во вторую.*

Теорема 1. *Пусть $G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F\rangle$ — игра с отношениями предпочтения. Пусть на множествах стратегий игроков и множестве исходов заданы отношения эквивалентности $\varepsilon_1 \subseteq X^2$, $\varepsilon_2 \subseteq Y^2$, $\varepsilon_3 \subseteq A^2$ и для тройки эквивалентностей $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ выполняется следующее условие согласованности:*

$$\left.\begin{array}{l} x' \overset{\varepsilon_1}{\equiv} x \\ y' \overset{\varepsilon_2}{\equiv} y \end{array}\right\} \Rightarrow F(x', y') \overset{\varepsilon_3}{\equiv} F(x, y). \tag{2}$$

Тогда определена фактор-игра

$$G/\varepsilon = \langle X/\varepsilon_1,\ Y/\varepsilon_2,\ A/\varepsilon_3,\ \rho_1/\varepsilon_3,\ \rho_2/\varepsilon_3,\ F_\varepsilon\rangle$$

с отношениями предпочтения, и тройка канонических отображений $\varphi = (\varphi_{\varepsilon_1}, \varphi_{\varepsilon_2}, \varphi_{\varepsilon_3})$ является сюръективным гомоморфизмом G на G/ε.

Доказательство.

Определим функцию реализации F_ε игры G/ε условием: $F_\varepsilon([x]_{\varepsilon_1}, [y]_{\varepsilon_2}) \overset{df}{=} [F(x, y)]_{\varepsilon_3}$.

Покажем, что определение отображения F_ε корректно, т.е. не зависит от выбора представителей из классов эквивалентностей. Действительно, возьмем других представителей этих классов $x' \in [x]_{\varepsilon_1}$, $y' \in [y]_{\varepsilon_2}$. Тогда $x' \overset{\varepsilon_1}{\equiv} x$, $y' \overset{\varepsilon_2}{\equiv} y$, отсюда по условию согласованности $F(x', y') \overset{\varepsilon_3}{\equiv} F(x, y)$, т.е. $[F(x', y')]_{\varepsilon_3} = [F(x, y)]_{\varepsilon_3}$. Таким образом, корректность определения отображения F_ε сводится к выполнению условия согласованности.

Определение функции реализации F_ε может быть записано в виде $F_\varepsilon(\varphi_{\varepsilon_1}(x), \varphi_{\varepsilon_2}(y)) = \varphi_{\varepsilon_3}(F(x, y))$. Таким образом, здесь выполнено условие $(H2)$ гомоморфизма, причем $\psi = \varphi_{\varepsilon_3}$, $\Phi = F_\varepsilon$, $\varphi_1 = \varphi_{\varepsilon_1}$, $\varphi_2 = \varphi_{\varepsilon_2}$. Условие $(H1)$ гомоморфизма выполняется по определению фактор-отношения.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G, Γ — две игры с отношениями предпочтения и тройка отображений $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — гомоморфизм G на Γ.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) тройка отношений эквивалентности $\varepsilon_\varphi = (\varepsilon_{\varphi_1}, \varepsilon_{\varphi_2}, \varepsilon_{\varphi_3})$, каждое из которых представляет собой ядро соответствующего отображения, *удовлетворяет условию согласованности* (2), *следовательно, можно построить фактор-игру* G/ε_φ*;*

2) существует тройка отображений $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ *из игры* G/ε_φ *в* Γ*, которая является изоморфным вложением* G/ε_φ *в* Γ*.*

Доказательство.

1. По определению выполняются равносильности:

$$x' \overset{\varepsilon_{\varphi_1}}{\equiv} x \Leftrightarrow \varphi_1(x') = \varphi_1(x);$$

$$y' \overset{\varepsilon_{\varphi_2}}{\equiv} y \Leftrightarrow \varphi_2(y') = \varphi_2(y);$$

$$a' \overset{\varepsilon_{\varphi_3}}{\equiv} a \Leftrightarrow \varphi_3(a') = \varphi_3(a).$$

Каждое из отношений $(\varepsilon_{\varphi_1}, \varepsilon_{\varphi_2}, \varepsilon_{\varphi_3})$ является отношением эквивалентности. Проверим условие согласованности, которое сводится здесь к выполнению равенства $\varphi_{\varepsilon_3}(F(x', y')) = \varphi_{\varepsilon_3}(F(x, y))$. Так как $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — гомоморфизм, то доказываемое равенство принимает вид $\Phi(\varphi_1(x'), \varphi_2(y')) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$, а так как $\varphi_1(x') = \varphi_1(x)$, $\varphi_2(y') = \varphi_2(y)$, то доказываемое равенство очевидно. По теореме 1 можно построить фактор-игру G/ε_φ, причем тройка канонических отображений будет сюръективным гомоморфизмом G на G/ε_φ.

2. Строим изоморфное вложение игры G/ε_φ в игру Γ по правилу: $\theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}) = \varphi_1(x)$, $\theta_2([y]_{\varepsilon_{\varphi_2}}) = \varphi_2(y)$, $\theta_3([a]_{\varepsilon_{\varphi_3}}) = \varphi_3(a)$. Убедимся, что определения отображений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ корректны, т.е. каждое из указанных отображений не зависит от выбора представителя из соответствующего класса эквивалентности. Пусть x' и x находятся в одном и том же классе, тогда $x' \overset{\varepsilon_{\varphi_1}}{\equiv} x$, откуда $\varphi_1(x') = \varphi_1(x)$. Аналогично убеждаемся в корректности определений θ_2, θ_3.

Докажем инъективность отображений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (например, для θ_1). Инъективность следует из цепочки равносильностей

$$\theta_1([x']_{\varepsilon_{\varphi_1}}) = \theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}) \Leftrightarrow \varphi_1(x') = \varphi_1(x) \Leftrightarrow x' \overset{\varepsilon_{\varphi_1}}{\equiv} x \Leftrightarrow [x']_{\varepsilon_{\varphi_1}} = [x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}.$$

Проверим, что тройка отображений $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ является гомоморфизмом из игры G/ε_φ в Γ.

Убедимся, что выполняется условие $(H1)$. Пусть $\big([a_1]_{\varepsilon_{\varphi_3}}, [a_2]_{\varepsilon_{\varphi_3}}\big) \in$ $\in \rho_i/\varepsilon_{\varphi_3}$. Тогда $\exists a_1' \overset{\varepsilon_{\varphi_3}}{\equiv} a_1, a_2' \overset{\varepsilon_{\varphi_3}}{\equiv} a_2$ (т.е. $\varphi_3(a_1') = \varphi_3(a_1), \varphi_3(a_2') = \varphi_3(a_2)$) $(a_1', a_2') \in \rho_i$; так как φ — гомоморфизм, то $(\varphi_3(a_1'), \varphi_3(a_2')) \in \sigma_i$. Используя написанные выше равенства, получаем $(\varphi_3(a_1), \varphi_3(a_2)) \in \sigma_i$. Согласно определению θ_3 получаем $\big(\theta_3([a_1]_{\varepsilon_{\varphi_3}}), \theta_3([a_2]_{\varepsilon_{\varphi_3}})\big) \in \sigma_i$.

Условие $(H2)$ принимает вид

$$\theta_3(F_\varepsilon([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}},[y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})) = \Phi(\theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}),\theta_2([y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})).$$

Запишем цепочку равенств:

$$\theta_3(F_\varepsilon([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}},[y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})) = \theta_3([F(x,y)]_{\varepsilon_{\varphi_3}}) = \varphi_3(F(x,y));$$

так как φ — гомоморфизм, то

$$\varphi_3(F(x,y)) = \Phi(\varphi_1(x),\varphi_2(y)) = \Phi(\theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}),\theta_2([y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})).$$

Обратная импликация в (1) может не выполняться. Таким образом, тройка отображений $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ является изоморфным вложением фактор-игры G/ε_φ в игру Γ.

Теорема доказана.

УДК 517.518.85

С.П. Сидоров

ОШИБКА ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ АЛГОРИТМАМИ

Пусть W есть замкнутое уравновешенное выпуклое подмножество линейного пространства X. Рассмотрим проблему оптимального восстановления линейного функционала L на основе множества значений линейных функционалов $l_1,\dots,l_n$. Для $f\in W$ положим

$$If := (l_1 f,\dots,l_n f).$$

Оператор $I: W\to\mathbb{R}^n$ называется *информационным.*

Задачи оптимального восстановления функционалов возникают во многих приложениях теории приближения функций и привлекают повышенное внимание. Подробное изложение предмета можно найти в статье [1] и книге [2].

Пусть V — некоторый конус в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\Phi(V)$ означает класс всех линейных алгоритмов $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, использующих информацию I, таких, что $A(v)\geqslant 0$ для всех $v\in V$.

Величина

$$e(L,W,I,V) := \inf_{A\in\Phi(V)}\ \sup_{f\in W}\ |Lf - A(If)|$$