5. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры со случайными факторами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 77–79.

6. *Шолпо И. А.* Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1983.

УДК 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

О БАЗСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В данной статье рассматривается вопрос о базисности Рисса в пространстве $L_2[0,1]$ собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) дифференциального оператора с инволюцией

$$Ly = l[y] = y'(1-x) + q(x)y(x), x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y(0) = y(1), \tag{2}$$

где $q(x) \in L_2[0,1]$.

В случае, когда $q(x) \in C^1[0,1]$, базисность Рисса с.п.ф. оператора (1)—(2) может быть установлена методом из [1]. Значительные трудности, возникающие в случае, когда $q(x) \in L_2[0,1]$ в данной работе преодолеваются с помощью метода статьи [2] нахождения уточненных асимптотических формул для собственных значений системы Дирака. Рассмотрим систему Дирака:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v'(x) + \begin{pmatrix} 0 & -q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix} v(x) = \mu v(x), \tag{3}$$

$$M_0 v(0) + M_1 v(1) = 0, \tag{4}$$

где $q_1(x) = p(x)e^{2i\gamma(x)}$, $q_2(x) = p(x)e^{-2i\gamma(x)}$, $p(x) = \frac{1}{2}(q(x) - q(1-x))$, $\gamma(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x (q(t) + q(1-t))dt$, $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{-2i\gamma} \end{pmatrix}$, $\gamma = \gamma(1)$.

С помощью теоремы 1 из [2] (она легко обобщается и для случая $q_j(x) \in L_2[0,1]$) стандартно получается

Лемма 1. *Собственные значения краевой задачи (3)—(4) достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы*

$$\mu_n = -i(\gamma + n\pi + \mathcal{E}_n) \qquad (n = \pm\, n_0, \pm\, (n_0+1), \dots), \tag{5}$$

где $\mathcal{E}_n$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Ключевым моментом решения поставленной задачи о базисности Рисса с.п.ф. оператора L является уточнение асимптотических формул (5). Этот вопрос решается методом из статьи [2]. Обозначим одним и тем же α_n произвольные числа, лишь бы $\sum\ |\alpha_n|^2 <\ \infty$; и через β_n — такие α_n, которые можно точно выписать.

Лемма 2. *Для собственных значений краевой задачи (3)—(4) имеют место асимптотические формулы*

$$\mu_n = -i(\gamma + n\pi) + \beta_n + \alpha_n^2 \qquad (n = \pm\ n_0, \pm\ (n_0 + 1), \dots) \tag{6}$$

Лемма 3. *Число λ, достаточно большое по модулю, является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда число $\mu = -i\lambda$ является собственным значением краевой задачи (3)—(4) и выполняется условие $iv_1(0) + v_2(0) = ie^{i\gamma}v_1(1) + e^{-i\gamma}v_2(1)$. При этом $y(x) = ie^{i\gamma(x)}v_1(x) + e^{-i\gamma(x)}v_2(x)$ есть соответствующая собственная функция оператора L. Здесь $v_j(x) = v_j(x, \mu)\,(j = 1, 2)$ есть компоненты решения задачи (3)—(4).*

Леммы 1 — 3 используем для доказательства следующей теоремы

Теорема 1. *Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и для них имеют место асимптотические формулы*

$$\lambda_n = i\mu_{2n} \qquad (n = \pm\ n_0, \pm\ (n_0 + 1), \dots),$$

где μ_{2n} определяется в (6).

Обозначим через φ_n собственные функции оператора L, соответствующие собственным значениям λ_n, и через φ_n^* — собственные функции оператора $L^*z = z'(1 - x) + \bar{q}(x)z(x), z(0) = z(1)$, соответствующие $\bar{\lambda}_n$.

Используем лемму 3 и теорему 1 в следующем утверждении.

Теорема 2. *Для любой $f \in L_2[0, 1]$ имеет место:*

$$(f, \varphi_n) = \alpha_n, \quad (f, \varphi_n^*) = \alpha_n, \quad (\varphi_n, \varphi_n^*) = 2 + o(1),$$

где $(\cdot\,, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0, 1]$.

Теорема 3. *Системы с.п.ф. операторов L и L^* полны в $L_2[0, 1]$.*

Из теорем 2 и 3 по теореме Бари ([3], с. 374—375) следует основной результат.

Теорема 4. *Системы с.п.ф. оператора L образует базис Рисса в $L_2[0, 1]$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 2. С. 196—204.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака// Докл.АН. 2012. Т. 443. №4. С. 414—417.

3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М. : Наука, 1965. 445 с.

УДК 517.51

Д. С. Лукомский

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ХААРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Статья посвящена численному решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[0,1]$ с использованием разложения функций в ряд по системе Хаара [1]. Ранее, например, в работах [2, 3] рассматривалось применение функций Хаара для решения дифференциальных уравнений и вариационных задач. Однако в данной статье предложен другой подход. Ранее с помощью системы Хаара строилось само решение дифференциального уравнения. В этом случае приходилось вводить специальный оператор дифференцирования для кусочно-постоянных функций, что приводило к довольно громоздким вычислениям.

В данной работе по заданной ортогональной системе записывается разложение второй производной функции. И, после двойного интегрирования, искомое решение будет представимо в виде ряда по системе кусочно-квадратичных функций.

Рассмотрим задачу Коши на отрезке $[0,1]$ следующего вида:

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y(x) = f(x) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}. \tag{1}$$

Запишем функции $p(x)$ и $f(x)$ в виде их разложения в ряд по системе Хаара:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h_k(x),$$