Условие $(H2)$ принимает вид

$$\theta_3(F_\varepsilon([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}, [y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})) = \Phi(\theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}), \theta_2([y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})).$$

Запишем цепочку равенств:

$$\theta_3(F_\varepsilon([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}, [y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})) = \theta_3([F(x,y)]_{\varepsilon_{\varphi_3}}) = \varphi_3(F(x,y));$$

так как φ — гомоморфизм, то

$$\varphi_3(F(x,y)) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) = \Phi(\theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}), \theta_2([y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})).$$

Обратная импликация в (1) может не выполняться. Таким образом, тройка отображений $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ является изоморфным вложением фактор-игры G/ε_φ в игру Γ.

Теорема доказана.

УДК 517.518.85

С.П. Сидоров

ОШИБКА ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ АЛГОРИТМАМИ

Пусть W есть замкнутое уравновешенное выпуклое подмножество линейного пространства X. Рассмотрим проблему оптимального восстановления линейного функционала L на основе множества значений линейных функционалов $l_1, \dots, l_n$. Для $f \in W$ положим

$$If := (l_1 f, \dots, l_n f).$$

Оператор $I : W \to \mathbb{R}^n$ называется *информационным.*

Задачи оптимального восстановления функционалов возникают во многих приложениях теории приближения функций и привлекают повышенное внимание. Подробное изложение предмета можно найти в статье [1] и книге [2].

Пусть V — некоторый конус в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\Phi(V)$ означает класс всех линейных алгоритмов $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, использующих информацию I, таких, что $A(v) \geqslant 0$ для всех $v \in V$.

Величина

$$e(L, W, I, V) := \inf_{A \in \Phi(V)} \sup_{f \in W} |Lf - A(If)|$$

есть ошибка задачи оптимального линейного восстановления линейного функционала L на W на основе информации If, $f \in W$, *с ограничением* V.

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма. *Пусть W есть замкнутое уравновешенное выпуклое подмножество линейного пространства X и V есть некоторый конус в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$e(L, W, I, V) \geq \sup_{f \in W,\ -If \in V} Lf.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} e(L, W, I, V) \geq \inf_{A \in \Phi(V)} \sup_{f \in W} (Lf - A(If)) \geq \\ \geq \inf_{A \in \Phi(V)} \sup_{f \in W,\ -If \in V} (Lf + A(-If)) \geq \\ \geq \inf_{A \in \Phi(V)} \sup_{f \in W,\ -If \in V} Lf = \sup_{f \in W,\ -If \in V} Lf. \end{aligned}$$

$\square$

Рассмотрим конус $V_+ := \{v \in \mathbb{R}^n : \ v \geq 0\}$.

Пусть $n = p^r$, $p \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $p, r \geq 2$, $D = [0,1]^r$, $X = C(D)$ есть пространство непрерывных на множестве D функций, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_r) \in \in D$. Обозначим

$$A = \{(x_1^{[i_1]}, \ldots, x_r^{[i_r]}) : \ 0 \leq i_j \leq p\} \subset D$$

множество точек, координаты которых лежат в узлах многомерной сетки

$$0 \leqslant x_i^{[1]} < \ldots < x_i^{[p]} \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, r.$$

Множество A содержит n точек, перенумеруем их и обозначим $a^{[i]}$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $L = \delta_\zeta$, $I = (\delta_{a_1}, \ldots, \delta_{a_n})$, т.е. $Lf = f(\zeta)$ и $If = = (f(a^{[1]}), \ldots, f(a^{[n]}))$.

Обозначим P_m множество всех алгебраических многочленов степени порядка не выше m, заданных на множестве D, и

$$P_m^* := \left\{p = p(x_1, \ldots, x_r) \in P_m : \ \left|\frac{\partial^m p}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}\right| \leq 1, \ 1 \leq i_j \leq r, \ j = 1, \ldots, r\right\}.$$

Пусть $\zeta \in D$ и $x_i^{[k_i]} \leq \zeta_i < x_i^{[k_i+1]}$, $i = 1, \ldots, r$. Обозначим

$$p(x_1, \ldots, x_r) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^r \left(x_i - \frac{x_i^{[k_i+1]} + x_i^{[k_i]}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i^{[k_i+1]} - x_i^{[k_i]}}{2}\right)^2.$$

Теорема. *Имеет место следующая оценка ошибки оптимальной интерполяции на множестве P_m^* на основе информации I с ограничением V_+:*

$$e(\delta_\zeta, P_2^*, I, V_+) = \begin{cases} 0, \ m = 0, 1, \\ p(\zeta_1, \dots, \zeta_r), \ m = 2. \end{cases}$$

Доказательство. Если $m = 0$ или $m = 1$, то утверждение легко следует из леммы. Рассмотрим случай $m = 2$. Очевидно, $p \in P_2$ и $-Ip \in V_+$. Из леммы следует, что

$$e(\delta_\zeta, P_2, I, V_+) \geq \sup_{f \in P_2, \ -If \in V_+} f(\zeta) > p(\zeta).$$

Линейный алгоритм, дающий верхнюю оценку, может быть успешно построен [3]. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* Optimal estimation in approximation theory // A survey of optimal recovery. N. Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.

2. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.

3. *Васильев Р.К.* О порядке приближения функций многих переменных линейными положительными операторами конечного ранга // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 1. С. 3–15.

УДК 513.6

М.Н. Сусин

ТОЛЕРАНТНЫЕ ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВА ТОЛЕРАНТНЫХ ПЕТЕЛЬ

В статье с помощью свойств толерантного расслоения путей и точной гомотопической последовательности толерантного расслоения доказываются классические свойства толерантных гомотопических групп пространства толерантных петель.

Толерантное пространство [1] — это пара (X, τ), где $\tau \in X \times X$ — отношение толерантности на множестве X, т.е. рефлексивное и симметричное бинарное отношение. Отношения толерантности являются наиболее общей математической моделью понятия схожести и заменяют непрерывность в различных областях математики и ее приложений.