Теорема. *Имеет место следующая оценка ошибки оптимальной интерполяции на множестве P_m^* на основе информации I с ограничением V_+:*

$$e(\delta_\zeta, P_2^*, I, V_+) = \begin{cases} 0, \ m = 0, 1, \\ p(\zeta_1, \ldots, \zeta_r), \ m = 2. \end{cases}$$

Доказательство. Если $m = 0$ или $m = 1$, то утверждение легко следует из леммы. Рассмотрим случай $m = 2$. Очевидно, $p \in P_2$ и $-Ip \in V_+$. Из леммы следует, что

$$e(\delta_\zeta, P_2, I, V_+) \geq \sup_{f \in P_2, \ -If \in V_+} f(\zeta) > p(\zeta).$$

Линейный алгоритм, дающий верхнюю оценку, может быть успешно построен [3]. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* Optimal estimation in approximation theory // A survey of optimal recovery. N. Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.

2. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.

3. *Васильев Р.К.* О порядке приближения функций многих переменных линейными положительными операторами конечного ранга // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 1. С. 3–15.

УДК 513.6

М.Н. Сусин

ТОЛЕРАНТНЫЕ ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВА ТОЛЕРАНТНЫХ ПЕТЕЛЬ

В статье с помощью свойств толерантного расслоения путей и точной гомотопической последовательности толерантного расслоения доказываются классические свойства толерантных гомотопических групп пространства толерантных петель.

Толерантное пространство [1] — это пара (X, τ), где $\tau \in X \times X$ — отношение толерантности на множестве X, т.е. рефлексивное и симметричное бинарное отношение. Отношения толерантности являются наиболее общей математической моделью понятия схожести и заменяют непрерывность в различных областях математики и ее приложений.

Отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\theta)$ толерантных пространств называется *толерантным*, если из толерантности $x_1\tau x_2$ следует $f(x_1)\theta f(x_2)$.

В теории толерантной гомотопии [2] роль единичного отрезка параметров гомотопии играют толерантные пространства (I_n,ι_n), где $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\left\{\frac{k}{n}\ \middle|\ k=\overline{0,n}\right\}$, $\frac{k}{n}\iota_n\frac{l}{n}\Leftrightarrow\ |k-l|\le 1$.

Определение 1. Два толерантных отображения $f_0,f_1:(X,\tau)\to$ $\to(Y,\theta)$ называются *толерантно гомотопными* и записываются $f_0{\sim}f_1$, если существует $n\in\mathbb{N}$ и толерантное отображение $F:(X\times I_n,\tau\times\iota_n)\to$ $\to(Y,\theta)$ такое, что

1) $(\forall x\in X)\ F(x,0)=f_0(x)$, 2) $(\forall x\in X)\ F(x,1)=f_1(x)$.

Если в определении 1 взять $n=1$, то толерантную гомотопность называют *простой* и записывают $f_0\approx f_1$.

Определение толерантного расслоения [3] формально повторяет свой алгебро-топологический аналог и означает, что любая толерантная гомотопия в базе расслоения поднимается по начальным условиям в пространство расслоения.

Определение 2. *Толерантным путем длины n в (X,τ)* называется толерантное отображение $\omega_n:(I_n,\iota_n)\to(X,\tau)$. Точки $\omega_n(0)$ и $\omega_n(1)$ называются началом и концом пути ω_n. Если $\omega_n(0)=\omega_n(1)=x_0$, то ω_n называется толерантной петлей в точке x_0.

Обозначим через $P(X,x_0)$ — множество толерантных путей пространства (X,τ) с началом в точке $x_0\in X$ и определим подмножества толерантных петель

$$\Omega(X,x_0)=\left\{\omega_n\in P(X,x_0)\ |\ \omega_n(1)=x_0\right\},$$

подмножества толерантных путей ограниченной длины

$$P_M(X,x_0)=\left\{\omega_n\in P(X,x_0)\ |\ n\le M\right\},\quad M\in\mathbb{N},$$

постоянных толерантных путей

$$CP(X,x_0)=\left\{\varepsilon_n\in P(X,x_0)\ |\ (\forall k=\overline{0,n})\ \varepsilon_n(\frac{k}{n})\equiv x_0\right\}.$$

Пусть $\omega_n:(I_n,\iota_n)\to(X,\tau)$ — толерантный путь в (X,τ). *Элементарным замедлением пути ω_n в точке* $k=\overline{0,n}$ назовем толерантный путь $\mu(k)(\omega_n)$ длины $n+1$ такой, что

$$\mu(k)(\omega_n)(\frac{l}{n+1})=\begin{cases}\omega_n(\frac{l}{n}),\ l=\overline{0,k};\\ \omega_n(\frac{l-1}{n}),\ k=\overline{k+1,n+1};\end{cases}$$

Определение 3. Пути ω_n и ${\omega'}_m$ из $P(X,x_0)$ назовем *$\varkappa$–толерантыми*, если выполняется одно из условий:

1) $n=m$ и $\omega_n \approx \omega'_m$,

2) $n=m+1$ и $\omega_n \approx \mu(\overline{k})(\omega'_m)$,
$\overline{k} = max\left\{k|(\forall l=\overline{0,k})\omega_n(\frac{l}{n}) = \omega'_m(\frac{l}{m})\right\}$,

3) $m=n+1$ и $\mu(\overline{k})(\omega_n) \approx \omega'_m$,
$\overline{k} = max\left\{k|(\forall l=\overline{0,k})\omega_n(\frac{l}{n}) = \omega'_m(\frac{l}{m})\right\}$.

Теорема 1. *Для каждого $M \in \mathbb{N}$ пространство $(P_M(X,x_0),\varkappa)$ является толерантно стягиваемым и*

$$P_M(X,x_0) \subset P_{M+1}(X,x_0),\ P(X,x_0) = \bigcup_{M\in\mathbb{N}} P_M(X,x_0).$$

Доказательство. Рассмотрим два толерантных отображения

$$F : P_M(X,x_0) \times I_M \to P_M(X,x_0),$$

$$F(\omega_n, \frac{l}{M})(\frac{k}{n}) = \begin{cases} \omega_n(\frac{k}{n}),\ k=\overline{0,M-l}; \\ \omega_n(\frac{M-l}{n}),\ k=\overline{M-l,n}; \end{cases}$$

$$G : CP_M(X,x_0) \times I_{M-1} \to CP_M(X,x_0),$$

$$G(\varepsilon_n, \frac{l}{M-1}) = \begin{cases} \varepsilon_n,\ n \le M-l; \\ \varepsilon_{M-l},\ n \ge M-l. \end{cases}$$

Легко проверить, что эти отображения осуществляют толерантные гомотопии

$$F : 1_{P_M(X,x_0)} \sim \Phi,\ G : 1_{CP_M(X,x_0)} \sim \mathrm{const}_{\varepsilon_1},$$

где $\Phi : P_M(X,x_0) \to CP_M(X,x_0)$ такое, что $\Phi(\omega_n) = \varepsilon_n$, а отображение $\mathrm{const}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_n) \equiv \varepsilon_1$. Отсюда следует, что толерантное отображение

$$F*G : P_M(X,x_0) \times I_{2M-1} \to P_M(X,x_0),$$

$$F*G(\omega_n, \frac{l}{2M-1}) = \begin{cases} F(\omega_n, \frac{l}{M}),\ l=\overline{0,M}; \\ G(\varepsilon_n, \frac{l-M}{M-1}),\ l=\overline{M,2M-1}; \end{cases}$$

осуществляет толерантную гомотопию

$$F*G : 1_{P_M(X,x_0)} \sim \mathrm{const}_{\varepsilon_1},\ \mathrm{const}_{\varepsilon_1}(\omega_n) \equiv \varepsilon_1. \ \square$$

Как следствие теоремы 1, получаем

Предложение 1. *Для произвольного толерантного пространства (X,τ) пространство $(P(X,x_0),\varkappa)$ имеет тривиальные толерантные гомотопические группы, т.е.* $(\forall m \ge 1)\ \pi_m(P(X,x_0)) = 0$.

По аналогии с доказательством теоремы в работе [3] доказывается

Теорема 2. *Толерантное отображение* $\rho : (P(X,x_0),\varkappa) \to (X,\tau)$ *такое, что*

$$\rho(\omega_n) = \omega(1),$$

является толератным расслоением со слоем $\rho^{-1}(x_0) = (\Omega(X, x_0), \varkappa)$.

Теорема 3. *Пространство толерантных петель* $(\Omega(X, x_0), \varkappa)$ *линейно связного толерантного пространства* (X, τ) *имеет следующие толерантные гомотопические группы:*

$$(\forall m \geq 1)\ \pi_m(\Omega(X, x_0)) \cong \pi_{m+1}(X). \tag{1}$$

Доказательство. Используя теорему 9 из работы [4], напишем точную гомотопическую последовательность толерантного расслоения из теоремы 2:

$$\cdots \to \pi_m(\Omega(X, x_0)) \to \pi_m(P(X, x_0)) \to$$
$$\to \pi(X) \to \pi_{m-1}(\Omega(X, x_0)) \to \pi_{m-1}(P(X, x_0)) \to \dots\ .$$

Из точности этой последовательности и предложения 1 следует (1). □

Следствие 1. Все толерантные гомотопические группы $\pi_m(\Omega(X, x_0))$, $m \geq 1$, *пространства толерантных петель* $(\Omega(X, x_0), \varkappa)$ *коммутативны.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3. С. 93–106.

2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

3. *Сусин М.Н.* Слабая толерантность в пространстве толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 121–131.

4. *Небалуев С.И.* Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. V, вып. 3(11). С. 64–97.

УДК 517.51

В.Г. Тимофеев

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КРУГЕ

Пусть K – круг с центром O радиуса h и границей Γ, $C = C(K)$ – множество непрерывных на K функций с нормой $\|u\|_C = \sup\{|u(x)| : x \in K\}$, $L_\infty = L_\infty(K)$ – множество измеримых существенно ограниченных на K функций с нормой $\|u\|_\infty = \text{essup}\,\{|u(x)| :\ x \in K\}$, $D = D(K)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций, сосредоточенных строго внутри K. Обозначим через U класс функций из C,