Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трынин А.Ю.* Существование систем Чебышева с ограниченными константами Лебега интерполяционных процессов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2008. Вып. 10. С. 79–81.
2. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1977.
3. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
4. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

УДК 517.51

Р.Н. Фадеев

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, так что $2 \le p_j \le N$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и пусть $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. Если $m_0 = 1$ и $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$, то каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j, \tag{1}$$

(при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, берем разложение с конечным числом $x_j \neq 0$). Если число $k \in \mathbb{Z}_+$ представимо единственным образом в виде $k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z}_j$, то по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right)\right)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0, 1)$. Коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L[0, 1)$ и частичная сумма Фурье по этой системе задаются формулами

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}dt, \ n \in \mathbb{Z}_+; \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), n \in \mathbb{N}.$$

Если $x, y \in [0, 1)$ представлены в виде (1), то по определению $x \oplus y := z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j \in \mathbb{Z}_j$, $z_j = x_j + y_j \,(mod\, p_j)$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Пусть $D_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \chi_j(x)$ — ядро Дирихле для данной системы, тогда $S_n(f)(x) = f * D_n(x) := \int_0^1 f(x \ominus t) D_n(t)\,dt$. Известно, что при $k < m_n$ функции $\chi_k(x)$ постоянны на $[i/m_n, (i+1)/m_n)$, $i = 0, \ldots, m_n - 1$, а $D_{m_n}(t)$ равно m_n на $[0, 1/m_n)$ и нулю на $[1/m_n, 1)$. Все эти факты можно найти в работе [1, §1.5].

Пусть $osc(f, [a,b)) = \sup\limits_{x,y \in [a,b)} |f(x) - f(y)|$, а $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ — положительная возрастающая последовательность, причем $\lambda_0 = 1$. По определению

$$Fl_{p,\lambda}(f, I_0^n) = \sup_{j \geq n} \left(\sum_{i=0}^{m_j/m_n} \left(\frac{osc(f, I_i^j)}{\lambda_i} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leq P < \infty.$$

Лемма [2, гл. 4, §3]. *Пусть* $n = \sum\limits_{j=1}^{s} n_j m_{j-1}$, $n_j \in \mathbb{Z}_j$, $j = 1, \ldots, s$. *Тогда*

$$D_n(t) = D_{m_{s-1}}(t) \sum_{l=0}^{n_s - 1} \chi_{m_{s-1}}^l(t) +$$

$$+ \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) D_{m_{s-2}}(t) \sum_{l=0}^{n_{s-1}-1} \chi_{m_{s-2}}^l(t) + \ldots + \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) \ldots \chi_{m_1}^{n_2}(t) D_{m_0}(t) \sum_{l=0}^{n_1 - 1} \chi_{m_0}^l(t).$$

Теорема. *Пусть* $n = \sum\limits_{j=1}^{s} n_j m_{j-1}$, $n_j \in \mathbb{Z}_j$, $j = 1, \ldots, s$, $n_s \neq 0$, $g_x(t) = f(x) - f(x \ominus t)$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. *Тогда*

$$|f(x) - S_n(f)(x)| \leq n_s Fl_{p,\lambda}(g_x, I_0^{s-1}) + 2p_s \sum_{k=0}^{s-2} \left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k - 1} \lambda_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \frac{m_k n_{k+1}}{m_s} Fl_{p,\lambda}(g_x, I_0^k).$$

Доказательство. Так как $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$, то $f(x) - S_n(f, x) = \int\limits_0^1 D_n(t) g_x(t) dt$. Поскольку $g_x(0) = 0$, следуя лемме, оценим сначала

$$\left| \int_0^1 D_{m_{s-1}}(t) \left(\sum_{l=0}^{n_s - 1} \chi_{m_{s-1}}^l(t) \right) g_x(t) dt \right| = \left| m_{s-1} \int_0^{\frac{1}{m_{s-1}}} \left(\sum_{l=0}^{n_s - 1} \chi_{m_{s-1}}^l(t) \right) g_x(t) dt \right| \leq$$

$$\leq m_{s-1} \int_0^{\frac{1}{m_{s-1}}} \left| \sum_{l=0}^{n_s - 1} \chi_{m_{s-1}}^l(t) \right| |g_x(t) - g_x(0)| dt \leq$$

$$\le n_s m_{s-1} \int\limits_0^{\frac{1}{m_{s-1}}} osc(g_x, I_0^{s-1})dt \le n_s Fl_{p,\lambda}(g_x, I_0^{s-1}). \tag{2}$$

Пусть $J_k = \left| \int\limits_0^1 D_{m_k}(t) \left(\sum\limits_{l=0}^{n_{k+1}-1} \chi_{m_k}^l(t) \right) \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) \dots \chi_{m_{k+1}}^{n_{k+2}}(t) g_x(t)dt \right|$.

Так как функции $\chi_{m_j}(x)$ при $j < s-1$ постоянны на всех I_i^{s-1} и $[0, \frac{1}{m_k}) = \bigcup\limits_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} I_i^{s-1}$, то обозначая значение $\chi_{m_{s-2}}^{n_{s-1}}(x) \dots \chi_{m_{k+1}}^{n_{k+2}}(x)$ на I_i^{s-1} через A_i ($|A_i| = 1$), получаем

$$J_k = m_k \left| \sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} \int\limits_{I_i^{s-1}} A_i \left(\sum_{l=0}^{n_{k+1}-1} \chi_{m_k}^l(t) \right) \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) g_x(t)dt \right| \le$$

$$\le m_k n_{k+1} \sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} \left| \int\limits_{I_i^{s-1}} \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) g_x(t)dt \right| =: M_k.$$

Поскольку $I_i^{s-1} = \bigcup\limits_{j=0}^{p_s-1} I_{j+ip_s}^s$ и $\chi_{m_{s-1}}$ постоянна на всех I_i^s, то, произведя замену переменной, имеем

$$M_k \le m_k n_{k+1} \sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} \left| \sum_{j=0}^{p_s-1} \int\limits_{I_{ip_s}^s} \chi_{m_{s-1}}^{n_s} \left(t \oplus \frac{j}{m_s} \right) g_x \left(t \oplus \frac{j}{m_s} \right) dt \right| \le$$

$$\le m_k n_{k+1} \sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} \left| \int\limits_{I_{ip_s}^s} \sum_{j=0}^{p_s-1} \chi_{m_{s-1}}^{n_s} \left(\frac{j}{m_s} \right) g_x \left(\frac{j}{m_s} \oplus t \right) dt \right|.$$

Нетрудно видеть, что $\sum\limits_{j=0}^{p_s-1} \chi_{m_{s-1}} \left(\frac{j}{m_s} \right) = \sum\limits_{j=0}^{p_s-1} \exp \left(\frac{2\pi i j n_s}{p_s} \right) = 0$, так как $n_s \neq 0$. Введем величины $r_1 = \sum\limits_{j=0}^{p_s-1} (\Re \ exp(2\pi i j n_s/p_s))^+$ и $r_2 = = \sum\limits_{j=0}^{p_s-1} (\Im \ exp(2\pi i j n_s/p_s))^+$. Рассуждая аналогично [3], находим, что

$$\left| \sum_{j=0}^{p_s-1} \exp \left(\frac{2\pi i j n_s}{p_s} \right) g_x \left(t \oplus \frac{j}{m_s} \right) \right| \le (r_1 + r_2) osc(g_x(t), I_i^{s-1}),$$

откуда

$$M_k \le m_k n_{k+1}(r_1+r_2)\frac{1}{m_s}\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} osc(g_x(t), I_i^{s-1}) \le$$

$$\le \frac{2m_k n_{k+1} p_s}{m_s}\left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1}\lambda_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1}\left(\frac{osc(g_x(t), I_i^{s-1})}{\lambda_i}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{2m_k n_{k+1} p_s}{m_s}\left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1}\lambda_i^q\right)^{\frac{1}{q}} Fl_{p,\lambda}(g_x(t), I_0^k). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) вытекает результат теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.

3. *Onneweer C.W., Waterman D.* Uniform convergence of Fourier series on groups.I // Michigan Math. J. 1971. Vol. 18, №2. P. 265–273.

УДК 517.984

А.Е. Федосеев

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, РАЗРЫВНЫМ НА ЛУЧАХ

В данной статье изучается равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и в ряды по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, ядро которого терпит разрывы первого рода на лучах, выходящих из центра единичного квадрата.

Рассмотрим в пространстве $L[0,1]$ интегральный оператор

$$Af = \int_0^1 A(x,t) f(t)\, dt, \quad x \in [0,1], \qquad (1)$$

где ядро $A(x,t)$ принимает постоянные значения: α_1 при $0 \le t \le x \le \frac{1}{2}$, α_2 при $0 \le x \le t \le \frac{1}{2}$, α_3 при $0 \le x \le 1-t \le \frac{1}{2}$, α_4 при $0 \le 1-t \le x \le \frac{1}{2}$,