откуда

$$M_k \le m_k n_{k+1}(r_1+r_2)\frac{1}{m_s}\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} osc(g_x(t), I_i^{s-1}) \le$$

$$\le \frac{2m_k n_{k+1} p_s}{m_s}\left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1}\lambda_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1}\left(\frac{osc(g_x(t), I_i^{s-1})}{\lambda_i}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{2m_k n_{k+1} p_s}{m_s}\left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1}\lambda_i^q\right)^{\frac{1}{q}} Fl_{p,\lambda}(g_x(t), I_0^k). \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает результат теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.

3. *Onneweer C.W., Waterman D.* Uniform convergence of Fourier series on groups.I // Michigan Math. J. 1971. Vol. 18, №2. P. 265–273.

УДК 517.984

А.Е. Федосеев

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, РАЗРЫВНЫМ НА ЛУЧАХ

В данной статье изучается равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и в ряды по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, ядро которого терпит разрывы первого рода на лучах, выходящих из центра единичного квадрата.

Рассмотрим в пространстве $L[0,1]$ интегральный оператор

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt, \quad x\in[0,1], \tag{1}$$

где ядро $A(x,t)$ принимает постоянные значения: α_1 при $0\le t\le x\le \frac{1}{2}$, α_2 при $0\le x\le t\le\frac{1}{2}$, α_3 при $0\le x\le 1-t\le\frac{1}{2}$, α_4 при $0\le 1-t\le x\le\frac{1}{2}$,

α_5 при $\frac{1}{2} \le x \le t \le 1$, α_6 при $\frac{1}{2} \le t \le x \le 1$, α_7 при $\frac{1}{2} \le 1-t \le x \le 1$, α_8 при $\frac{1}{2} \le x \le 1-t \le 1$.

Оператор (1) является частным случаем интегрального оператора, рассмотренного в работе [1]. В данной статье для операторов вида (1) выделен класс операторов, для которых можно явно выписать условия, при которых имеет место равносходимость разложений в ряд по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора A и тригонометрических рядов Фурье, а также найдены условия обратимости оператора (1) и получены формулы для обратного оператора.

Следующая теорема дает вид обратного оператора.

Теорема 1. *Оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $l = (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_6-\alpha_5)-(\alpha_7-\alpha_8)(\alpha_4-\alpha_3) \neq 0$ и имеет вид*

$$A^{-1}y = \frac{1}{l}\Big((\alpha_6-\alpha_5)y'(x)+(\alpha_3-\alpha_4)y'\left(1-x\right)\Big), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$
$$A^{-1}y = \frac{1}{l}\Big((\alpha_1-\alpha_2)y'\left(x\right)+(\alpha_8-\alpha_7)y'(1-x)\Big), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

где $y(x) \in D_{A^{-1}}$ — множество, состоящее из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условиям

$$\Big[1+\frac{1}{l}(\alpha_2(\alpha_6-\alpha_5)+\alpha_3(\alpha_8-\alpha_7))\Big]y(0)+\frac{1}{l}\Big[\alpha_3\alpha_1-\alpha_2\alpha_4-$$
$$-\alpha_2(\alpha_6-\alpha_5)-\alpha_3(\alpha_8-\alpha_7)\Big]y\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{l}(\alpha_3\alpha_1-\alpha_2\alpha_4)y(1)=0,$$

$$\frac{1}{l}(\alpha_8\alpha_6-\alpha_5\alpha_7)y(0)+\Big[1+\frac{1}{l}\Big(\alpha_8(\alpha_3-\alpha_4)+\alpha_5(\alpha_1-\alpha_2)-$$
$$-\alpha_8\alpha_6+\alpha_5\alpha_7\Big)\Big]y\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{l}\Big(\alpha_8(\alpha_3-\alpha_4)+\alpha_5(\alpha_1-\alpha_2)\Big)y(1)=0.$$

Исследование сходимости разложений по с.п.ф. оператора A проводится методом, основанным на свойствах и оценках резольвенты Фредгольма $R_\lambda(A)f = (I-\lambda A)^{-1}Af$, где I — единичный оператор, λ — спектральный параметр.

Введем краевую задачу

$$v'(x) = \lambda D v(x) + D m(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \tag{2}$$

$$P_0 v(0) + P_1 v\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{3}$$

где $v(x) = \left(v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x)\right)^T$, $f(1-x)\big)^T$, $D = (a_{ij})_{i,j=1}^4$, $a_{11} = -a_{33} = \alpha_1 - \alpha_2$, $a_{14} = -a_{32} = \alpha_4 - \alpha_3$, $a_{22} = -a_{44} = \alpha_6 - \alpha_5$, $a_{23} = -a_{41} = \alpha_7 - \alpha_8$, $a_{ij} = a_{ji} = 0$, $i = 1, 4$, $j = 2, 3$, $m(x) = \left(f(x), f\left(\frac{1}{2}+x\right), f\left(\frac{1}{2}-x\right)\right.$, $P_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = -M$, $Q_1 = E + M$, $M = \dfrac{1}{l}\begin{pmatrix} \alpha_2(\alpha_6-\alpha_5)+\alpha_3(\alpha_8-\alpha_7) & \alpha_3\alpha_1-\alpha_2\alpha_4 \\ \alpha_8\alpha_6-\alpha_5\alpha_7 & \alpha_8(\alpha_3-\alpha_4)+\alpha_5(\alpha_1-\alpha_2) \end{pmatrix}$,
E –единичная матрица.

Теорема 2. *Если $v(x)$ является решением краевой задачи* (2), (3), *а соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A)$ существует и $R_\lambda(A)f = v_1(x)$ при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $R_\lambda(A)f = v_2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ при $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.*

Рассмотрим класс операторов, для которых

$$\alpha_3 = \alpha_4,\ \alpha_7 = \alpha_8,\ \alpha_2 = \alpha_5 = 0. \tag{4}$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$\alpha_1\alpha_6 \neq 0,\ \alpha_1 \neq \pm\alpha_6. \tag{5}$$

В этом случае существует неособая матрица Γ, диагонализирующая D, то есть $\Gamma^{-1}D\Gamma = D_1 = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, ω_i, $i = \overline{1,4}$ — собственные значения матрицы D. Тогда краевая задача (2), (3) перейдет в

$$\begin{aligned} &h'(x) = \lambda D_1 h(x) + m_1(x), \\ &U(h) = P_0\Gamma h(0) + P_1\Gamma h\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

где $h = \Gamma^{-1}v$, $m_1(x) = \Gamma^{-1}Dm(x)$.
Обозначим $Y(x,\lambda) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda\omega_1 x}, \ldots, e^{\lambda\omega_4 x}\right)$, $\Delta(\lambda) = U\left(Y(x,\lambda)\right)$,

$$S_\delta = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_m| \geq \delta > 0, \lambda_m\text{- нули } \Delta(\lambda), \\ |\lambda - i\frac{4\pi k}{\omega_j}| \geq \delta, j = \overline{1,4}, k \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

На основе результатов работы [1] получается

Теорема 3 (равносходимости). *Если выполняются условия* (4), (5), *а также $\alpha_3\alpha_8 \neq 0$ и $\alpha_3\alpha_8 \neq \alpha_6\alpha_1$, то для любой функции $f(x) \in L[0,1]$*

имеют место соотношения

$$\lim_{r\to\infty}\left\|S_r(f,x)-\sum_{j=1}^{2}\gamma_{1j}\frac{1}{\omega_j}\sigma_{r|\omega_j|}\left(m_{1j},x\right)\right\|_{\left[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon\right]}=0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\left\|S_r(f,x)-\sum_{j=3}^{4}\gamma_{2j}\frac{1}{\omega_j}\sigma_{r|\omega_j|}\left(m_{1j},x-\frac{1}{2}\right)\right\|_{\left[\frac{1}{2}+\varepsilon,1-\varepsilon\right]}=0,$$

где $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$*,* $S_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k*, для которых* $|\lambda_k|<r$*;* γ_{kj} *— компоненты матрицы* Γ*:* $\Gamma^{-1}D\Gamma=D_1=diag(\omega_1,\ldots,\omega_4)$*;* $\sigma_r(f,x)$ *— частичная сумма ряда Фурье по системе* $\left\{e^{i4\pi kx}\right\}$ *на отрезке* $\left[0,\frac{1}{2}\right]$*, при таких* $k\in\mathbb{Z}$*, что* $|k|<\dfrac{r}{4\pi}$*;* m_{1j} *— компоненты* $m_1(x)$*.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, №11. С. 115–142.

УДК 519.53, 519.713

Е.В. Хворостухина

ОБ ЭПИМОРФИЗМАХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

В настоящей статье рассматриваются так называемые гиперграфические автоматы без выходных сигналов, т.е. автоматы, у которых множества состояний наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как многообразие таких алгебраических систем охватывает, в частности, автоматы, у которых множества состояний являются плоскостями (например, проективными или аффинными).

Напомним [1], что *гиперграфом* называется система вида $H=(X,L)$, где X – непустое множество и L – семейство произвольных подмножеств X. Элементы множества X называются *вершинами*, а элементы множества L называются *ребрами гиперграфа*. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются *смежными*. Гиперграф $H=(X,L)$ называется *эффективным*, если любая его вершина принадлежит некоторому его ребру.

Пусть p – произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть *гиперграфом с p-определимыми ребрами*, если в каждом ребре этого