алгебраическая система $A = (H, \mathrm{End}H, \delta)$ с функцией $\delta(\varphi, x) = \varphi(x)$, где $(\varphi, x) \in \mathrm{End}H \times X$, является гиперграфическим автоматом, который обозначается $\mathrm{Atm}H$ и называется *универсальным гиперграфическим автоматом.*

Эндоморфизмом гиперграфического автомата $A = (H, S, \delta)$ называется пара отображений $\pi = (f, g)$, где f – эндоморфизм гиперграфа H, g – эндоморфизм полугруппы $\mathrm{End}H$ и для любых $x \in X, s \in S$ выполняется равенство $f(\delta(x, s)) = \delta(f(x), g(s))$. Эндоморфизм $\pi : A \longrightarrow A$ называется *автоморфизмом автомата A на автомат A*, если $f : H \longrightarrow H$, $g : S \longrightarrow S$ – автоморфизмы.

Теорема 1. *Пусть $H = (X, L)$ – эффективный гиперграф с p - определимыми ребрами. Для универсального гиперграфического автомата* $\mathrm{Atm}H = (H, \mathrm{End}H, \delta)$ *и эндомоморфизма $\pi = (f, g)$ автомата* $\mathrm{Atm}H$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $\pi = (f, g)$ – сюръективный эндоморфизм $\mathrm{Atm}H$*;*

2) g – сюръективный эндоморфизм $\mathrm{End}H$*, $g = f^2$;*

3) g – автоморфизм $\mathrm{End}H$*, $g = f^2$;*

4) π – автоморфизм автомата $\mathrm{Atm}H$*;*

5) f – автоморфизм H, $g = f^2$.

Следствие. *Полугруппа сюръективных эндоморфизмов автомата* $\mathrm{Atm}H$ *совпадает с группой автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Atm}H)$*, которая изоморфна декартову произведению группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}H$ *и группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}H)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зыков А.А.* Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29, №6. С. 89–154.

2. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970.

3. *Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.

УДК 517.51

А.А. Хромов

АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СТЕПЕНЯМИ РЕЗОЛЬВЕНТ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Получен метод нахождения приближений к гладким решениям интегрального уравнения, имеющего структуру уравнения второго рода и вырожденное ядро в ситуации, когда обратный оператор неограничен.

В данной статье продолжено исследование приближающих свойств резольвенты оператора дифференцирования [1].

Рассмотрим операторы:

$$\Omega_r^{(k)} = \begin{cases} \Omega_{2r}^{(k)}, & x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r}^{(k)}, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где

$$\Omega_{2r} u = r \int\limits_x^1 e^{r(x-t)} u(t) dt.$$

Лемма 1. *Операторы* Ω_{ir}^k, $i = 1, 2$, *имеют вид*

$$\Omega_{1r}^k = r^k \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-r(x-t)} u(t) dt, \tag{1}$$

$$\Omega_{2r}^k = r^k \int\limits_x^1 \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{r(x-t)} u(t) dt. \tag{2}$$

Доказательство. Для $k = 2$ имеем

$$\Omega_{1r}^2 u = r^2 \int\limits_0^x e^{-r(x-t)} dt \int\limits_0^t e^{-r(t-\tau)} u(\tau) d\tau =$$

$$= r^2 e^{-rx} \int\limits_0^x dt \int\limits_0^t e^{r\tau} u(\tau) d\tau = r^2 e^{-rx} \int\limits_0^x e^{r\tau} u(\tau) d\tau \int\limits_\tau^x dt =$$

$$= r^2 e^{-rx} \int\limits_0^x (x-\tau) e^{r\tau} u(\tau) d\tau = r^2 \int\limits_0^x (x-\tau) e^{-r(x-\tau)} u(\tau) d\tau.$$

Заменив обозначение τ на t, получим (1) при $k = 2$.

Методом математической индукции получим формулу (1) для любого k.

Аналогично получается формула (2) для $\Omega_{2r}^k u$.

Лемма 2. *Если* $u \in C^1[0, 1]$, *то операторы* Ω_{ir}^k, $i = 1, 2$, *имеют представление*

$$\Omega_{1r}^k u = -\frac{r^{k-1} x^{k-1} e^{-rx}}{(k-1)!} u(0) + \Omega_{1r}^{k-1} u - \frac{1}{r} \Omega_{1r}^k u', \tag{3}$$

$$\Omega_{2r}^k u = -\frac{r^{k-1}(1-x)^{k-1}e^{-r(1-x)}}{(k-1)!}u(1) + \Omega_{2r}^{k-1}u + \frac{1}{r}\Omega_{2r}^k u', \qquad (4)$$

где $k \geq 2$.

Доказательство. Пусть $k = 2$. Тогда из (1) получаем

$$\Omega_{1r}^2 u = r^2 \int\limits_0^x (x-t)e^{-r(x-t)}u(t)dt.$$

Интегрируем по частям:

$$\Omega_{1r}^2 u = r^2 \left\{ \frac{1}{r}[e^{-r(x-t)}(x-t)u(t)] \Big|_0^x - \frac{1}{r}\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}[-u(t) + ((x-t)u(t))'_t]dt \right\} =$$

$$= r\left[-xe^{-rx}u(0) + \int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt - \int\limits_0^x e^{-r(x-t)}(x-t)u'(t)dt \right] =$$

$$= -rxe^{-rx}u(0) + \Omega_{1r}u - \frac{1}{r}\Omega_{1r}^2 u'.$$

Методом математической индукции доказываем формулу (3).

И точно также получается формула (4).

Лемма 3. *Для* $u(x) \in C[0,1]$ *справедливы соотношения:*

$$\|\Omega_{1r}^k u - u\|_{C[\varepsilon,1]} \to 0 \quad \textit{при} \quad r \to \infty, \quad k = 1, 2, \ldots; \qquad (5)$$

$$\|\Omega_{2r}^k u - u\|_{C[0,1-\varepsilon]} \to 0 \quad \textit{при} \quad r \to \infty, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

Доказательство. Для $k = 1$ соотношение (5) доказано в лемме 1 из работы [3]. Пусть $k \geq 2$, а $u(x) \in C^k[0,1]$ Обозначим $\varphi_l(r,x) = -\frac{r^l x^l e^{-rx}}{l!}$.

Из (3) имеем

$$\|\Omega_{1r}^k u - u\|_{C[\varepsilon,1]} \leq \|\varphi_{k-1}(r,x)u(0)\|_{C[\varepsilon,1]} + \|\Omega_{1r}^{k-1}u - u\|_{C[\varepsilon,1]} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{r}\Omega_{1r}^k u' \right\|_{C[\varepsilon,1]} \leq \|\varphi_{k-1}(r,x)u(0)\|_{C[\varepsilon,1]} + \|\varphi_{k-2}(r,x)u(0)\|_{C[\varepsilon,1]} +$$

$$+ \cdots + \|\varphi_1(r,x)u(0)\|_{C[\varepsilon,1]} + \|\Omega_{1r}u - u\|_{C[\varepsilon,1]} + \left\| \frac{1}{r}\Omega_{1r}^2 u' \right\|_{C[\varepsilon,1]} +$$

$$+\left\|\frac{1}{r}\Omega_{1r}^3 u'\right\|_{C[\varepsilon,1]}+\cdots+\left\|\frac{1}{r}\Omega_{1r}^k u'\right\|_{C[\varepsilon,1]}.$$

Далее, поскольку $\varphi_l(r,x) \le r^l e^{-r\varepsilon}$ на отрезке $[\varepsilon,1]$, то сумма слагаемых, содержащих функции $\varphi_l(r,x)$, $l=1,\ldots,k-1$, имеет оценку $O(r^{k-1}e^{-r\varepsilon}\|u\|_{C[0,1]})$. Далее, $\|\Omega_{1r}u-u\|_{C[\varepsilon,1]}\to 0$ при $r\to\infty$ для любой $u(x)\in C[0,1]$.

Осталось показать, что слагаемые, содержащие $u'(x)$, могут быть как угодно малыми при $r\to\infty$, если $u(x)\in C^k[0,1]$, т.е. что $\left\|\frac{1}{r}\Omega_{1r}^l u'\right\|_{C[\varepsilon,1]}\to$ $\to 0$ при $r\to\infty$ для $l=2,\ldots,k$.

Пусть $l=2$. Тогда из (1.16) с заменой u на u' получим

$$\frac{1}{r}\Omega_{1r}^2 u' = -xe^{-rx}u'(0)+\frac{1}{r}\Omega_{1r}u'-\frac{1}{r^2}\Omega_{1r}^2 u''.$$

Легко убедиться, что $\frac{1}{r}\Omega_{1r}u'$ и $\frac{1}{r^2}\Omega_{1r}^2 u''$ имеют оценку $O\left(\frac{1}{r}\right)$.

Для произвольного r из (3) получаем

$$\frac{1}{r}\Omega_{1r}^l u' = \frac{1}{r}\varphi_{l-1}(r,x)u'(0)+\frac{1}{r}\Omega_{1r}^{l-1}u'-\frac{1}{r^2}\Omega_{1r}^l u''. \tag{7}$$

Из (1) имеем

$$\frac{1}{r}\Omega_{1r}^{l-1}u' = r^{l-2}\int_0^x e^{-r(x-t)}\frac{(x-t)^{l-2}}{(l-2)!}u'(t)dt, \tag{8}$$

$$\frac{1}{r^2}\Omega_{1r}^{l}u'' = r^{l-2}\int_0^x e^{-r(x-t)}\frac{(x-t)^{l-1}}{(l-1)!}u''(t)dt. \tag{9}$$

Берем интегралы в правых частях (8) и (9) по частям, каждый раз "перебрасывая"производную на функцию $u'(t)$ в (8) и функцию $u''(t)$ в (9) до тех пор, пока перед интегралами не исчезнут степени r, т.е. интегрируем $l-2$ раза. Тогда в (8) мы придем к интегралу $\int_0^x e^{-r(x-t)}u^{(l-1)}(t)dt$, а в (9) – к интегралу $\int_0^x e^{-r(x-t)}(x-t)u^{(l)}(t)dt$, которые имеют оценки $O\left(\frac{1}{r}\|u^{(l-1)}\|_{C[0,1]}\right)$ и $O\left(\frac{1}{r}\|u^{(l)}\|_{C[0,1]}\right)$ соответственно.

Подстановки, которые получаются при интегрировании, будут состоять из функций $\varphi_m(r,x)$, $m=1,\ldots,l-3$ в формуле (8); $m=1,\ldots,l-2$ в формуле (9), умноженных на значения производных функции $u(x)$ в нуле до $(l-2)$ -го порядка включительно в формуле (8); до $(l-1)$ -го порядка включительно в формуле (9). Общая сумма этих подстановок и первого слагаемого, стоящего в правой части выражения (7), будет иметь порядок $r^{l-1}e^{-r\varepsilon}$ на отрезке $[\varepsilon, 1]$.

Из вышесказанного следует, что соотношения (5) выполняются для любой $u(x) \in C^k[0,1]$. Но множество функций, k раз непрерывно дифференцируемых, всюду плотно в пространстве $C[0,1]$ по теореме Вейерштрасса.

Далее, нормы операторов Ω_{1r}^k, рассматриваемых как операторы из $C[0,1]$ в $C[\varepsilon,1]$, ограничены константами, не зависящими от r, поскольку

$$\|\Omega_{1r}^k u\|_{C[\varepsilon,1]} = \|\Omega_{1r}(\Omega_{1r}^{k-1})u\|_{C[\varepsilon,1]} = \|\Omega_{1r}\Omega_{1r}\dots(\Omega_{1r}u)\|_{C[\varepsilon,1]} \le \|u\|_{C[0,1]}.$$

По теореме Банаха — Штейнгауза соотношение (5) справедливо для любой $u \in C[0,1]$.

Аналогично доказывается сходимость (6).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.А.* Решение интегральных уравнений с помощью резольвент простейших дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 52–58.

УДК 517.984

А.П. Хромов

ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Обозначим через L оператор: $Ly = p(x)y'(x)$, $x \in [0,1]$, $p(x) = a$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $p(x) = b$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $a > 0$, $b > 0$, с краевым условием: $y(0) = y(1)$.

В настоящей статье получена теорема равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье и аналог теоремы Жордана – Дирихле.

В случае знакопеременной $p(x)$ оператор L изучался в работе [1]. А для самосопряженного оператора Штурма – Лиувилля с разрывной весовой функцией В.А. Ильин [2] получил теорему равносходимости в точке разрыва, а Н.П. Купцов [3, с. 201–205] получил аналог теоремы Дирихле.

Пусть $y = R_\lambda f = (L - \lambda E)^{-1} f$, где λ — спектральный параметр, E — единичный оператор. Тогда

$$p(x)y'(x) - \lambda y(x) = f(x), \tag{1}$$