УДК 519.642.8

Г.В. Хромова

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА

В данной статье получены условия согласования параметра регуляризации с погрешностью исходных данных, обеспечивающие сходимость приближенных решений уравнения первого рода с произвольным линейным ограниченным оператором при применении метода М.М. Лаврентьева.

Рассматривается уравнение первого рода

$$Au = f, \tag{1}$$

где A — линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве, A^{-1} существует, но неограничен, правая часть задана приближенно: $\|f_\delta - f\| \le \delta$; семейство операторов

$$T_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}, \tag{2}$$

соответствующих методу М.М. Лаврентьева [1].

В классической постановке этого метода предполагается, что $A = A^* > 0$, и доказывается, что тогда семейство T_α является регуляризирующим [2] для уравнения (1).

Пусть теперь A — произвольный линейный ограниченный оператор. В работе [3] даны условия на оператор A и точное решение u, необходимые и достаточные для сходимости:

$$\|T_\alpha f - u\| \to 0 \qquad \text{при} \ \ \alpha \to 0. \tag{3}$$

Предположим, что эти условия выполняются, т.е. $u \in \overline{M(A)}$ (замыкание области значений оператора A), $\|\alpha T_\alpha A v\| \to 0$ при $\alpha \to 0$, для $u = Av$ и $\|T_\alpha A\| \le K$, где K не зависит от α.

Применим операторы T_α к f_δ и выясним вопрос о сходимости

$$\|T_\alpha f_\delta - u\| \to 0 \qquad \text{при} \ \ \alpha \to 0, \ \delta \to 0.$$

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, T_\alpha, u) = sup\left\{\|T_\alpha f_\delta - u\| : \|f_\delta - f\| \le \delta\right\}.$$

Теорема. *Для того чтобы*

$$\Delta(\delta, T_\alpha, u) \to 0 \qquad \text{\textit{при}} \;\; \delta \to 0, \tag{4}$$

необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям:

$$\alpha(\delta) \to 0, \; \delta/\alpha(\delta) \to 0 \qquad \text{\textit{при}} \;\; \delta \to 0.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1 из [4], которая остается справедливой, если вместо уравнения (8) из [4] мы рассмотрим уравнение $\alpha u + Au = f$, соответствующее методу М.М. Лаврентьева. Согласно этой теореме, для сходимости (4) при $\alpha \to 0, \; \delta \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы

а) $\Delta_1(T_\alpha, u) = \|T_\alpha f - u\| \to 0 \qquad$ при $\;\alpha \to 0,$

б) $\Delta_2(T_\alpha, \delta) \equiv sup\{\|T_\alpha f_\delta - T_\alpha f\| : \|f_\delta - f\| \le \delta\} \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$.

Условие а) выполняется по нашему предположению.

Поскольку $\Delta_2(T_\alpha, \delta) = \|T_\alpha\| \, \delta$, то условие б) эквивалентно условию $\|T_\alpha\| \, \delta \to 0$ при $\alpha \to 0, \; \delta \to 0$, которое приводит к согласованию $\alpha = \alpha(\delta)$ такому, чтобы $\left\|T_{\alpha(\delta)}\right\| \delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Выразим норму $\|T_\alpha\|$ через норму $\|T_\alpha A\|$.

Имеем:

$$T_\alpha = (\alpha E + A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\left[(E + \frac{1}{\alpha}A)^{-1} \mp E\right] = \frac{1}{\alpha}\left[E + (E + \frac{1}{\alpha}A)^{-1} - E\right] =$$
$$= \tfrac{1}{\alpha}\left[E + (E + \tfrac{1}{\alpha}A)^{-1}(E - (E + \tfrac{1}{\alpha}A))\right] = \tfrac{1}{\alpha}\left[E - \tfrac{1}{\alpha}(E + \tfrac{1}{\alpha}A)^{-1}A\right] =$$
$$= \tfrac{1}{\alpha}(E - T_\alpha A).$$

Из последнего представления вытекает двусторонняя оценка:

$$\frac{1}{\alpha}|1 - K| \le \|T_\alpha\| \le \frac{1}{\alpha}(1 + K).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 92 с.

2. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

3. *Хромова Г.В.* О сходимости методов регуляризации // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы Восьмой Междунар. Казан. летн. науч. шк.-конф. Казань, 27 июня – 4 июля 2007 г. (Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского.) Казань: Изд-во Казан. мат. общ-ва, 2007. Т. 35. С. 264–265.

4. *Иванов В.К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 3. С. 410–421.

УДК 519.642.8

О.И. Шаталина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Данная статья представляет собой развитие методов, предложенных в работе [1] для восстановления периодических функций на случай непрерывных функций, заданных на отрезке.

Пусть некоторая непрерывная на отрезке [-1,1] функция $f(x)$ задана её приближением $f_\delta(x)$ в пространстве $L_2[-1,1] : \|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2[-1,1]} \leq \delta$.

Требуется по $f_\delta(x)$ и δ построить приближение к $f(x)$ в метрике пространства $C[-1,1]$. Это так называемая задача восстановления функции из L_2 в C.

Для решения поставленной задачи используем частичные суммы Фурье по полиномам Лежандра.

Пусть $P_n(x)_{n=0}^{\infty}$ — система ортонормированных полиномов Лежандра [2].

Обозначим через S_n оператор частичных сумм Фурье функции $f(x)$ по полиномам Лежандра:

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Для большого класса непрерывных функций выполняется сходимость:

$$\|S_n f - f\|_{C[-1,1]} \to 0, \tag{1}$$

при $n \to \infty$.

Будем предполагать, что для функции $f(x)$ выполняется сходимость (1).

Применим оператор S_n к функции $f_\delta(x)$ и рассмотрим норму

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[-1,1]}.$$

Справедлива очевидная оценка:

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[-1,1]} \leq \|S_n\|_{L_2 \to C}\delta + \|S_n f - f\|_C. \tag{2}$$