4. *Иванов В.К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 3. С. 410–421.

УДК 519.642.8

О.И. Шаталина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Данная статья представляет собой развитие методов, предложенных в работе [1] для восстановления периодических функций на случай непрерывных функций, заданных на отрезке.

Пусть некоторая непрерывная на отрезке [-1,1] функция $f(x)$ задана её приближением $f_\delta(x)$ в пространстве $L_2[-1,1] : \|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2[-1,1]} \leq \delta$.

Требуется по $f_\delta(x)$ и δ построить приближение к $f(x)$ в метрике пространства $C[-1,1]$. Это так называемая задача восстановления функции из L_2 в C.

Для решения поставленной задачи используем частичные суммы Фурье по полиномам Лежандра.

Пусть $P_n(x)_{n=0}^{\infty}$ — система ортонормированных полиномов Лежандра [2].

Обозначим через S_n оператор частичных сумм Фурье функции $f(x)$ по полиномам Лежандра:

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Для большого класса непрерывных функций выполняется сходимость:

$$\|S_n f - f\|_{C[-1,1]} \to 0, \tag{1}$$

при $n \to \infty$.

Будем предполагать, что для функции $f(x)$ выполняется сходимость (1).

Применим оператор S_n к функции $f_\delta(x)$ и рассмотрим норму

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[-1,1]}.$$

Справедлива очевидная оценка:

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[-1,1]} \leq \|S_n\|_{L_2 \to C} \delta + \|S_n f - f\|_C. \tag{2}$$

Из (2) следует, что для сходимости

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[-1,1]} \to 0 \tag{3}$$

при $n \to \infty$, $\delta \to 0$, достаточно согласовать n с δ так, чтобы

$$\delta \|S_{n(\delta)}\|_{L_2 \to C} \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Найдем это согласование.

Теорема 1. *Для того чтобы имела место сходимость (3), достаточно выполнения согласования $n = n(\delta)$, удовлетворяющего условиям: $n(\delta) \to \infty, \delta n(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим норму $\|S_n\|_{L_2 \to C}$. Используем известную формулу для нормы интегрального оператора:

$$\|S_n f\|_{L_2 \to C} = \max_x \left(\int_{-1}^{1} K_n^2(x,t)dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$K_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_k(t)$$

— ядро интегрального оператора. В силу ортонормируемости и основных свойств полиномов Лежандра, получаем

$$\|S_n\|_{L_2 \to C} \le \frac{1}{\sqrt{2}}(n+1). \tag{4}$$

Подбирая особым образом конкретную функцию и точку, из представления (4) находится оценка снизу $\|S_n\|_{L_2 \to C}$, которая совпадает с верхней. Отсюда заключаем, что

$$\|S_n\|_{L_2 \to C} = \frac{1}{\sqrt{2}}(n+1). \tag{5}$$

Из (2) и (5) следует утверждение теоремы.

Если на функцию $f(x)$ наложены дополнительные условия, позволяющие получить оценку нормы $\|S_n f - f\|_C$ в (2), то для согласования $n = n(\delta)$ можно указать конкретные формулы и получить оценки погрешности для $\|S_{n(\delta)} f_\delta - f\|_C$.

Теорема 2. *Если $f(x) \in Lip\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$, то справедлива оценка:*

$$\|S_{n(\delta)} f_\delta - f\|_{C[-1,1]} \le K \delta^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}}, \tag{6}$$

где $n(\delta) = [|C_1(\alpha)\delta^{-\frac{2}{2\alpha+1}}|]$,
$\delta \le \delta_0 = (\frac{C_1(\alpha)}{2})^{\alpha+\frac{1}{2}}$,
$C_1(\alpha) = (\sqrt{2}C(\alpha)(\alpha - \frac{1}{2})^{\frac{2}{2\alpha+1}}$,
$K = \frac{1}{\sqrt{2}}C_1(\alpha) + C(\alpha)C_2$,
$C(\alpha)$ – *константа, зависящая только от выбора* α,
$C_2(\alpha) = (C_1(\alpha) - 2\delta_0^{\frac{2}{2\alpha+1}})$.

Доказательство. Известно [2], что для $f(x) \in Lip\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$, выполняется оценка:

$$\|S_n f - f\|_C \le \frac{C(\alpha)}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

Подставляем (6) и (5) в (2):

$$\|S_n f_\delta - f\|_C \le \frac{1}{\sqrt{2}}(n+1)\delta + \frac{C(\alpha)}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}. \tag{8}$$

Выберем $n = n(\delta)$ из условия минимума правой части (7) и возьмем целую часть от полученного выражения. Эту целую часть будем считать найденным согласованием $n(\delta)$, причем получаем:

$$n(\delta) = [C_1(\alpha)\delta^{\frac{1}{2\alpha+1}}], \tag{9}$$

где $C_1(\alpha)$ определено в условии теоремы.

Подставляя (7) в (8) и сделав необходимые преобразования каждого слагаемого, окончательно имеем

$$\|S_{n(\delta)} f_\delta - f\|_{C[-1,1]} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}C_1(\alpha)\delta^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}} + C(\alpha)\delta^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}}(C_1(\alpha) - 2\delta_0^{\frac{2}{2\alpha+1}})^{\frac{1}{2}-\alpha},$$

т.е. получили утверждение теоремы.

Аналогичная теорема справедлива для дифференцируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $f^{(p)} \in Lip\alpha, p + \alpha > \frac{1}{2}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М., 1979.

2. *Хромова Г.В.* О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // ЖВМ и МФ. 1977. Т.7, №5. С. 1161–1171.