УДК 517.984

В.И. Шевцов

О РЯДАХ ЭКСПОНЕНТ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Ряды экспонент имеют большое значение как в анализе, так и в теории чисел. Представления целых функций рядами экспонент изучались многими математиками. Фундаментальные исследования по теории представления функций рядами экспонент и их обобщениям проведены А.Ф. Леонтьевым [1, 2] и его учениками.

Пусть $L_1(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ — целая функция уточненного порядка $\rho_1(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1$ и типа σ_1. По определению $\rho(r)$ называется уточненным порядком, если существует $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0$. Предположим, что все нули функции $L_1(\lambda)$ простые, обозначим их через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Обозначим далее через B — класс целых функций таких, что любая функция из этого класса целая уточненного порядка $\rho_2(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho_2(r) = \rho_2$ и типа $\sigma_2 < \gamma$ при этом уточненном порядке и выполняются следующие условия:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{\rho - 1},\ (\gamma\rho_2)^{1/\rho_2}(2\sigma_1\rho_1)^{1/\rho_1} = 1. \tag{1}$$

В теории представления целых функций рядами экспонент важную роль играет интерполирующая функция, которая определяется следующим образом:

$$\omega_{L_1}(\mu, F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[F^{(k-1)}(0) + \mu F^{(k-2)}(0) + \cdots + \mu^{k-1} F(0)\right].$$

Эта функция в классе B является целой функцией комплексного переменного μ, так как выполнены условия (1). Интерполирующая функция была введена и исследована в работах А.Ф. Леонтьева и применялась в дальнейшем при рассмотрении рядов экспонент как в работах А.Ф. Леонтьева, так и в работах других математиков [3, 4]. В дальнейшем будем использовать следующую лемму.

Лемма. *Пусть $L(\lambda) = L_1(\lambda)L_2(\lambda)$, где $L_1(\lambda)$ — целая функция уточненного порядка $\rho_1(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1$ $(\rho_1 > 1)$ и типа σ_1, $L_2(\lambda)$ — целая функция уточненного порядка $\widetilde{\rho}_1(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \widetilde{\rho}_1(r) = \rho_1$ $(\rho_1 > 1)$ и типа σ_1. Если $f \in B$, то*

$$\omega_L(\mu, f) = L_1(\mu)\omega_{L_2}(\mu, f) + \omega_{L_1}(\mu, \Phi), \Phi(z) = M_{L_2}(f),$$

где $M_{L_2}(f) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k f^{(k)}(z), L_2(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k$.

Доказательство данной леммы проводится в основном так же, как доказательство соответствующего утверждения, приведенного в работе [2, с. 225] для целых функций обычных порядков.

Целой функции $f(z)$, $f \in B$, приведем в соответствие следующий ряд экспонент:

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, A_k = \frac{\omega_{L_1}(\lambda_k, f)}{L_1'(\lambda_k)}. \tag{2}$$

Отметим, что справедливо следующее свойство единственности: если все коэффициенты ряда (2) равны нулю, то $f(z) \equiv 0$. Поэтому функцию $f(z)$ можно восстановить по коэффициентам A_k [4]. В данной статье рассмотрен случай, когда

$$L_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\Big) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}, \lambda_k > 0. \tag{3}$$

Множество точек $A = \{\lambda_k\}$ имеет плотность $\Delta = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{n(r)}{\rho_1(r)}$ при уточненном порядке $\rho_1(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1$, $1 < \rho_1 < 2$ и $\lambda_{k+1} - \lambda_k > d\lambda_k^{1-\rho_1(\lambda_k)}$, $k > k_0$, $d > 0$. Функция $L_1(\lambda)$ – целая функция уточненного порядка $\rho_1(r)$ и типа $\sigma = -\frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho_1}$.

Пусть B^* — подкласс целых функций из B таких, что любая функция $f(z)$, принадлежащая B^*, удовлетворяет следующему уравнению бесконечного порядка:

$$M_{L_1}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(z) = 0,$$

где $L_1(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функция $f(z) \in B^*$ ограничена на вещественной оси, то $f(z) \equiv 0$.*

Доказательство. Так как $f(z) \in B^*$, то применяя лемму, сформулированную выше, и (3), получаем

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, \tag{4}$$

$$|A_k| < Be^{-h\alpha_k}, \alpha_k = \lambda_k^{\rho_1}, h > -\pi\Delta \operatorname{tg} \frac{\pi\rho_1}{2}, B = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Следовательно, целая функция $f(z)$ представляется абсолютно сходящимся во всей плоскости рядом экспонент (4), коэффициенты которого имеют оценку (5). Поэтому в силу теоремы Гашимова [5], так как функция $f(z)$ ограничена на вещественной оси, $f(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Заметим, что в доказанной теореме требование принадлежности функции $f(z)$ классу B^* является существенным. Для целой функции, принадлежащей классу B, ряд экспонент (2) может расходиться, а также сходиться не к функции $f(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М., 1976.

2. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент. М., 1981.

3. *Шевцов В.И.* К вопросу о восстановлении функции по известным коэффициентам соответствующего ей ряда по некоторой системе аналитических функций // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. науч. сб. Саратов, 1974. Вып. 4. С. 18–29.

4. *Шевцов В.И.* Представление целых функций уточненных порядков обобщенными рядами экспонент // Математика. Механика.: Сб. науч. тр. Саратов, 2006. Вып. 8. С. 157–160.

5. *Гашимов Г.М.* Теорема единственности для рядов Дирихле // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, №4. С. 722–725.

УДК 517.984

В.А. Юрко

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ С КОРНЕВЫМ ЦИКЛОМ

1. Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма — Лиувилля на графе с корневым циклом. Доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура решения обратной задачи. Отметим, что обратные задачи восстановления операторов Штурма — Лиувилля на дереве (т.е. на графе без циклов) исследовались в работе [1].

Рассмотрим компактный граф G в $\mathbf{R^m}$ с вершинами $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и ребрами $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где e_0 – цикл, $v_0 \in e_0$. Граф имеет вид $G = e_0 \cup T$, где T – дерево с корнем v_0, вершинами $\{v_0, \dots, v_r\}$ и ребрами $\{e_1, \dots, e_r\}$, причем $T \cap e_0 = v_0$ и v_0 – граничная вершина для T. Если $e = [v, w]$ – ребро (см. [1]), то v – его начальная точка, а w – его конечная точка; говорят, что e выходит из v и заканчивается в w. Для каждой внутренней вершины v обозначим через $R(v) := \{e \in \mathcal{E} : \ e = [v, w], \, w \in V\}$ множество ребер, выходящих из v. Для $v \in V$ положим $|v|$ – число ребер между v_0 и v; число $|v|$ называется *порядком вершины* v. *Порядком ребра* $e \in \mathcal{E}$ называется порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=\overline{1,r}} |v_j|$ называется *высотой дерева* T. Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : \ |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$ – множество вершин порядка μ, а $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in \mathcal{E} : \ e = [v, w], \, v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$,