имеют оценку (5). Поэтому в силу теоремы Гашимова [5], так как функция $f(z)$ ограничена на вещественной оси, $f(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Заметим, что в доказанной теореме требование принадлежности функции $f(z)$ классу B^* является существенным. Для целой функции, принадлежащей классу B, ряд экспонент (2) может расходиться, а также сходиться не к функции $f(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М., 1976.

2. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент. М., 1981.

3. *Шевцов В.И.* К вопросу о восстановлении функции по известным коэффициентам соответствующего ей ряда по некоторой системе аналитических функций // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. науч. сб. Саратов, 1974. Вып. 4. С. 18–29.

4. *Шевцов В.И.* Представление целых функций уточненных порядков обобщенными рядами экспонент // Математика. Механика.: Сб. науч. тр. Саратов, 2006. Вып. 8. С. 157–160.

5. *Гашимов Г.М.* Теорема единственности для рядов Дирихле // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, №4. С. 722–725.

УДК 517.984

В.А. Юрко

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ С КОРНЕВЫМ ЦИКЛОМ

1. Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма — Лиувилля на графе с корневым циклом. Доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура решения обратной задачи. Отметим, что обратные задачи восстановления операторов Штурма — Лиувилля на дереве (т.е. на графе без циклов) исследовались в работе [1].

Рассмотрим компактный граф G в $\mathbf{R^m}$ с вершинами $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и ребрами $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где e_0 – цикл, $v_0 \in e_0$. Граф имеет вид $G = e_0 \cup T$, где T – дерево с корнем v_0, вершинами $\{v_0, \dots, v_r\}$ и ребрами $\{e_1, \dots, e_r\}$, причем $T \cap e_0 = v_0$ и v_0 – граничная вершина для T. Если $e = [v, w]$ – ребро (см. [1]), то v – его начальная точка, а w – его конечная точка; говорят, что e выходит из v и заканчивается в w. Для каждой внутренней вершины v обозначим через $R(v) := \{e \in \mathcal{E} : \ e = [v, w], \, w \in V\}$ множество ребер, выходящих из v. Для $v \in V$ положим $|v|$ – число ребер между v_0 и v; число $|v|$ называется *порядком вершины* v. *Порядком ребра* $e \in \mathcal{E}$ называется порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=\overline{1,r}} |v_j|$ называется *высотой дерева* T. Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : \ |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$ – множество вершин порядка μ, а $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in \mathcal{E} : \ e = [v, w], \, v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$,

$\mu = \overline{1,\sigma}$ – множество ребер порядка μ. Занумеруем вершины v_j так, что $\Gamma := \{v_1, \ldots, v_p\}$ – граничные вершины G, $v_{p+1} \in V^{(1)}$, а v_j, $j > p+1$, занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра: $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1,r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \ldots, e_p\}$ – граничные ребра, $e_{p+1} = [v_0, v_{p+1}]$. Ребро e_{p+1}, выходящее из v_0, называется *корневым ребром для* T.

Пусть d_j – длина ребра e_j, $j = \overline{0,r}$. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, d_j]$, причем для $j = \overline{1,r}$ конечная вершина v_j соответствует $x_j = 0$, а начальная вершина v_{j_k} соответствует $x_j = d_j$; для цикла e_0 оба конца $x_0 = +0$ и $x_0 = d_0 - 0$ соответствуют v_0. Интегрируемая функция Y на G имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,r}}$, где $y_j(x_j)$ определены на e_j. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0,r}}$ – интегрируемая вещественная функция на G, которая называется *потенциалом*. Рассмотрим уравнение Штурма — Лиувилля на G:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in [0, d_j],\ j = \overline{0,r}, \tag{1}$$

где $y_j(x_j)$, $y_j'(x_j) \in AC[0, d_j]$ удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренних вершинах v_0 и v_k, $k = \overline{p+1,r}$:

$$y_j(d_j) = y_k(0) \text{ при всех } e_j \in R(v_k), \qquad \sum_{e_j \in R(v_k)} y_j'(d_j) = y_k'(0), \quad k = \overline{p+1,r}, \tag{2}$$

$$y_{p+1}(d_{p+1}) = y_0(d_0) = y_0(0), \quad y_{p+1}'(d_{p+1}) + y_0'(d_0) = y_0'(0). \tag{3}$$

Рассмотрим краевую задачу $L_0(G)$ для уравнения (1) с краевыми условиями $y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1,p}$. Кроме того, рассмотрим краевые задачи $L_k(G)$, $k = \overline{1,p}$, для (1) с краевыми условиями $y_k'(0) = 0, \quad y_j(0) = 0,\ j = \overline{1,p} \setminus k$. Пусть $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n \geq 1}$ – спектр $L_k(G)$, $k = \overline{0,p}$ (с учетом кратностей). Пусть $S_j(x_j, \lambda)$, $C_j(x_j, \lambda)$, $j = \overline{0,r}$, – решения (1) на ребре e_j с начальными условиями $S_j(0,\lambda) = C_j'(0,\lambda) = 0$, $S_j'(0,\lambda) = C_j(0,\lambda) = 1$. Положим $h(\lambda) := S_0(d_0, \lambda)$, $h(\lambda) := S_0(d_0, \lambda)$, $H(\lambda) := C_0(d_0, \lambda) - S_0'(d_0, \lambda)$. Пусть $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ – нули целой функции $h(\lambda)$, $\omega_n := \operatorname{sign} H(\nu_n)$, $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$.

Обратная задача 1. По данным Λ_k, $k = \overline{0,p}$, и Ω построить потенциал q на G.

2. Фиксируем $k = \overline{p+1,r}$ и обозначим $Q_k := \{z \in T :\ v_k < z\}$, $G_k := = \overline{G \setminus Q_k}$. Тогда $Q_k = \bigcup_{e_i \in R(v_k)} T_{ki}$, где T_{ki} – дерево с корнем v_k и корневым ребром e_i. Ясно, что $G_k = e_0 \cup T_k$, где $T_k = \overline{T \setminus Q_k}$.

Условимся, что если D – граф, то $L_0(D)$ – краевая задача для (1) на D с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах. Пусть $\{Y\}_D := \{y_j\}_{e_j \in D}$. Если v_j – граничная вершина D, то $L_j(D)$ обозначает краевую задачу для (1) на D с условием Неймана $Y'_{|v_j} = 0$ в v_j

и с условиями Дирихле во всех остальных граничных вершинах. Также рассмотрим краевую задачу $L^1(T)$ для (1) на T с краевыми условиями $Y'_{|v_0} = 0,\ Y_{|v_j} = 0,\ j = \overline{1,p}$.

Фиксируем $k = \overline{1,p}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{0,r}}$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям склейки (2), (3) и краевым условиям

$$\Phi_{kj}(0,\lambda) = \delta_{kj}, \quad j = \overline{1,p}, \tag{4}$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Обозначим $M_k(\lambda) := \Phi'_{kk}(0,\lambda)$, $k = \overline{1,p}$. Функция $M_k(\lambda)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k. Положим $M^0_{kj}(\lambda) = \Phi'_{kj}(0,\lambda)$, $M^1_{kj}(\lambda) = \Phi_{kj}(0,\lambda)$, $j = \overline{0,r}$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j,\lambda) = M^1_{kj}(\lambda)C_j(x_j,\lambda) + M^0_{kj}(\lambda)S_j(x_j,\lambda), \quad j = \overline{0,r}. \tag{5}$$

В частности, $M^0_{kk}(\lambda) = M_k(\lambda)$, $M^1_{kk}(\lambda) = 1$. Подставляя (5) в (2)—(4), получаем линейную систему s_k относительно $M^0_{kj}(\lambda), M^1_{kj}(\lambda)$, $j = \overline{0,r}$. Определитель $\Delta_0(\lambda, G)$ этой системы не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\lambda,G) = \Delta_0(\lambda,T)d(\lambda) + \Delta^1(\lambda,T)h(\lambda), \tag{6}$$

где $d(\lambda) = C_0(d_0,\lambda) + S'_0(d_0,\lambda) - 2$, а $\Delta_0(\lambda,T)$ и $\Delta^1(\lambda,T)$ – характеристические функции задач $L_0(T)$ и $L^1(T)$ соответственно (см. [1]). Функция $\Delta_0(\lambda,G)$ является целой по λ порядка 1/2, и ее нули (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями задачи $L_0(G)$. Решая алгебраическую систему s_k, получаем по формулам Крамера: $M^\nu_{kj}(\lambda) = \Delta^\nu_{kj}(\lambda,G)/\Delta_0(\lambda,G)$, $\nu = 0,1$, $j = \overline{0,r}$, где определитель $\Delta^\nu_{kj}(\lambda,G)$ получается из $\Delta_0(\lambda,G)$ заменой столбца, соответствующего $M^\nu_{kj}(\lambda)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\Delta_k(\lambda,G)/\Delta_0(\lambda,G), \quad k = \overline{1,p}, \tag{7}$$

где $\Delta_k(\lambda,G)$, $k = \overline{1,p}$, получаются из $\Delta_0(\lambda,G)$ заменой $S^{(\nu)}_k(d_k,\lambda)$, $\nu = 0,1$ на $C^{(\nu)}_k(d_k,\lambda)$. Нули $\Delta_k(\lambda,G)$ (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями задачи $L_k(G)$. Функция $\Delta_k(\lambda,G)$, $k = \overline{0,p}$, называется *характеристической функцией задачи* $L_k(G)$.

Фиксируем $k = \overline{p+1,r}$. Пусть $\Delta_0(\lambda,G_k)$ и $\Delta_k(\lambda,G_k)$ – характеристические функции для $L_0(G_k)$ и $L_k(G_k)$ соответственно. Формула (6) преобразуется к виду

$$\Delta_0(\lambda,G) = \Delta_0(\lambda,Q_k)\Delta_0(\lambda,G_k) + \Big(\prod_{e_i\in R(v_k)} \Delta_0(\lambda,T_{ki})\Big)\Delta_k(\lambda,G_k), \tag{8}$$

где $\Delta_0(\lambda, Q_k)$ и $\Delta_0(\lambda, T_{ki})$ – характеристические функции are для $L_0(Q_k)$ и $L_0(T_{ki})$ соответственно. Аналогично для $e_j \in E \cap T_{ks}$ имеем

$$\Delta_j(\lambda, G) = \Delta_j(\lambda, Q_k)\Delta_0(\lambda, G_k) + \Big(\Delta_j(\lambda, T_{ks}) \prod_{e_i \in R(v_k),\, i \neq s} \Delta_0(\lambda, T_{ki})\Big)\Delta_k(\lambda, G_k), \qquad (9)$$

где $\Delta_j(\lambda, Q_k)$ и $\Delta_j(\lambda, T_{ki})$ получены из $\Delta_0(\lambda, Q_k)$ и $\Delta_0(\lambda, T_{ki})$ заменой $S_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$, $j = 0, 1$, на $C_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$.

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$, $\Lambda^\delta := \{\rho : \arg\rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$, $\lambda_{kn}^0 = (\rho_{kn}^0)^2$, $k = \overline{0, p}$, – спектр задачи $L_k^0(G)$ с нулевым потенциалом $q = 0$, и пусть $\Delta_k^0(\lambda, G)$ – характеристические функции для $L_k^0(G)$. Используя (6), (8), (9), получаем следующие утверждения.

1) Существует $h > 0$ такое, что спектр $\lambda_{kn} = \rho_{kn}^2$ лежит в полосе $|\operatorname{Im}\rho| < h$.
2) При $\rho \in \Lambda^\delta$, $|\rho| \to \infty$ имеем $\Delta_k(\lambda, G) = \Delta_k^0(\lambda, G)(1 + O(\rho^{-1}))$.
3) При $n \to \infty$ имеем $\rho_{kn} = \rho_{kn}^0 + O((\rho_{kn}^0)^{-1})$.
4) Положим $\lambda_{kn}^{01} = \lambda_{kn}^0$, если $\lambda_{kn}^0 \neq 0$, и $\lambda_{kn}^{01} = 1$, если $\lambda_{kn}^0 = 0$. Тогда

$$\Delta_k(\lambda, G) = A_k^0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} - \lambda}{\lambda_{kn}^{01}}, \quad A_k^0 = \frac{(-1)^{s_k}}{s_k!}\Big(\frac{\partial^{s_k}}{\partial\lambda^{s_k}}\Delta_k^0(\lambda, G)\Big)_{|\lambda=0}, \qquad (10)$$

где $s_k \geq 0$ – кратность нулевого собственного значения для $L_k^0(G)$.

3. Рассмотрим вспомогательную обратную задачу для G на ребре e_k, $k = \overline{1, p}$, которая называется **IP(k)**: *дана* $M_k(\lambda)$, *построить* $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$.

Теорема 1. *Задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциал q_k на e_k. Функция q_k строится методом спектральных отображений* (см. [1]).

Рассмотрим вспомогательную обратную задачу на ребре e_0, которая называется **IP(0)**: даны $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$, построить $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, d_0]$.

Теорема 2. *Задание $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$ однозначно определяет потенциал $q_0(x_0)$ на $[0, d_0]$. Функция q_0 может быть построена по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1. *Даны $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$.*
1) Находим $\{\nu_n\}_{n\geq 1}$– нули $h(\lambda)$.
2) Вычисляем $H(\nu_n) = \omega_n\sqrt{d^2(\nu_n) - 4}$.
3) Строим $S_0'(d_0, \nu_n) = (d(\nu_n) - H(\nu_n))/2$.
4) Находим $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ по формуле $\alpha_n = \dot{h}(\nu_n)S_0'(d_0, \nu_n)$, $\dot{h}(\lambda) := \frac{dh(\lambda)}{d\lambda}$.
5) Строим q_0 по спектральным данным $\{\nu_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$, решая классическую обратную задачу Штурма – Лиувилля (см. [1]).

Пусть даны Λ_k, $k = \overline{0,p}$, и Ω. Решение обратной задачи 1 состоит в реализации так называемых D_μ-процедур последовательно при $\mu = \sigma, \sigma-1, \ldots, 1, 0$.

D$_\sigma$-процедура. 1) Для каждого $k = \overline{0,p}$ строим $\Delta_k(\lambda, G)$ по (10).
2) Для каждого $k = \overline{1,p}$ вычисляем функцию Вейля $M_k(\lambda)$ по (7).
3) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ решаем обратную задачу IP(k) и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$.
4) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$, $S_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$, $\nu = 0, 1$.
5) Для каждого $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ выберем s и j так, чтобы $e_j \in E \cap T_{ks}$. Решая линейную алгебраическую систему (8), (9), находим $\Delta_0(\lambda, G_k)$ и $\Delta_k(\lambda, G_k)$.
6) При каждом $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ строим функцию Вейля $M_k(\lambda)$ для G_k по формуле

$$M_k(\lambda) = -\Delta_k(\lambda, G_k)/\Delta_0(\lambda, G_k). \tag{11}$$

Выполним D_μ-процедуры при $\mu = = \overline{2, \sigma-1}$ по индукции. Фиксируем $\mu = \overline{2, \sigma-1}$ и предположим, что D_σ-$, \ldots, D_{\mu+1}$-процедуры уже выполнены. Выполним D_μ-процедуру.

D$_\mu$-процедура. 1) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ решаем обратную задачу IP(k) на G_k и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$.
2) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$, $S_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$, $\nu = 0, 1$.
3) Для каждого $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ выберем s и j так, чтобы $e_j \in E \cap T_{ks}$. Решая линейную алгебраическую систему (8), (9), находим $\Delta_0(\lambda, G_k)$ и $\Delta_k(\lambda, G_k)$.
4) При каждом фиксированном $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем $M_k(\lambda)$ для G_k по (11).

D$_1$-процедура. 1) Решаем обратную задачу IP(p+1) на G_{p+1} и находим $q_{p+1}(x_{p+1})$, $x_{p+1} \in [0, d_{p+1}]$ на корневом ребре e_{p+1}.
2) Вычисляем $C_{p+1}^{(\nu)}(d_{p+1}, \lambda)$, $S_{p+1}^{(\nu)}(d_{p+1}, \lambda)$, $\nu = 0, 1$.
3) Находим $d(\lambda)$ and $h(\lambda)$, решая линейную алгебраическую систему

$$\Delta_0(\lambda, G_{p+1}) = S_{p+1}(d_{p+1}, \lambda) d(\lambda) + S'_{p+1}(d_{p+1}, \lambda) h(\lambda),$$

$$\Delta_{p+1}(\lambda, G_{p+1}) = C_{p+1}(d_{p+1}, \lambda) d(\lambda) + C'_{p+1}(d_{p+1}, \lambda) h(\lambda).$$

D$_0$-процедура. Строим $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, d_0]$ на e_0 по алгоритму 1.
Таким образом, доказана следующяя теорема.

Теорема 3. *Задание* $\Lambda_k,\ k = \overline{0,p}$, *и* Ω *однозначно определяет потенциал* q *на* G, *который строится последовательным выполнением* D_σ-, $D_{\sigma-1}$-$,\dots,D_0$-*процедур.*

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.