$$\vartheta = 2\arccos(sqal(\bar{\nu} \circ \tilde{\bar{\nu}}^0)),$$

где $\bar{C} = \dfrac{\delta\bar{\omega}_\xi}{|\delta\bar{\omega}_\xi|}$, $\exp(\cdot)$ – кватернионная экспонента, $sqal(\cdot)$ – скалярная часть кватерниона. Этот случай имеет место, когда $\delta\bar{\omega}_\xi^0 \upuparrows vect(\bar{\nu}^0) \upuparrows \upuparrows \bar{p}_0 \upuparrows \bar{\varphi}_0$.

При $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$ задача решена численно с помощью метода Ньютона. Результаты математического моделирования подтвердили эффективность построенного закона оптимального управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 1 // Изв. РАН. Сер. МТТ. 2002. № 1. С. 3–17; 2002. № 2. С. 3–17.

2. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.

3. *Молоденков А.В.* Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления: Сб. науч. тр. Пермь, 1995. С. 122–131.

УДК 533.6.011.72:532.529

С.В. Иванов, А.Д. Ковалев

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В теоретических и экспериментальных исследованиях по динамике ударных волн в двухфазных газожидкостных средах широко применяются локально равновесные термодинамические модели, позволяющие учесть основной физический фактор — существенное изменение свойств сжимаемой среды. Равновесие модели двухфазных или в общем случае многофазных сред соответствуют двухпараметрическим средам, то есть определяются двумя независимыми термодинамическими параметрами. В задачах распространения относительно слабых волн уравнения состояния двухпараметрической среды рассматриваются обычно как произвольные и описываются дифференциальными уравнениями, соответствующими законам термодинамики [1]. При этом свойства двухпараметрической среды характеризуются коэффициентами дифференциальных уравнений.

Ниже дано конструктивное обобщение дифференциальной термодинамической модели произвольной двухпараметрической среды на случай локально равновестной многофазной среды с произвольными уравнениями состояния фаз. Основная задача построений заключается в получении конструктивных выражений для коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих многофазную среду, через концентрации фаз и наборы независимых параметров, характеризующих термодинамические свойства фаз.

Дифференциальные уравнения состояния произвольной двухпараметрической среды относительно p, ρ, T, S, U, a — давления, плотности, температуры, удельной энтропии, удельной внутренней энергии и адиабатической скорости звука, запишем в виде, близком [1]

$$\begin{array}{ll} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\rho a^2} - \alpha_p T \frac{dS}{c_p}\,, & \frac{dT}{T} = \alpha_p \frac{dp}{\rho c_p} + \frac{dS}{c_p}, \\ U = \frac{PdP}{p^2 a^2} + \left(1 - \frac{p\alpha_p}{\rho c_p}\right) TdS\,, & \frac{da}{a} = (m-1)\,\frac{dp}{\rho a^2} + m' \frac{dS}{c_p}\,. \end{array} \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения зависят от p, ρ, T, a и включают изобарный коэффициент расширения α_p, изобарную удельную теплоемкость c_p и параметры m, m', характеризующие нелинейность уравнений состояния:

$$\begin{array}{l} m \equiv \rho a \left(\delta_p a\right)_S + 1 = \frac{1}{2}\rho^3 a^4 \left(\delta_{pp}\rho^{-1}\right)_S\,, \\ m' \equiv \frac{c_p}{a}\left(\delta_S a\right)_p = -\frac{1}{2} a^2 c_p \delta_{pS}\rho. \end{array} \tag{2}$$

Для обычных сред выполняется неравенство, связанное с единственностью представлений об ударном переходе и входящее в определение среды с нормальными термодинамическими свойствами:

$$m > 0, \left(\left(\delta_{pp} V\right)_S > 0, \left(\delta_{vv} p\right)_S > 0; V = \rho^{-1}\right). \tag{3}$$

Здесь приведены также эквивалентные формулировки неравенства.

Для локально равновесных многофазных сред параметры p, T являются общими для фаз, а параметры ρ, α_p, c_p — аддитивными по фазам. Поэтому для обобщения (1) на случай многофазных сред остается выразить a, m, m' через параметры, аддитивные по фазам.

Естественные построения можно провести с использованием термодинамического потенциала Гиббса, зависящего от равновесных параметров $\Phi = \Phi\,(p, T)$. Потенциал определен с точностью до линейной функции от T и полностью характеризует термодинамические свойства среды:

$$\begin{array}{l} \rho = \Phi_p^{-1}, S = -\Phi_T, U = \Phi - p\Phi_p - T\Phi_T, \\ a^2 \equiv \left(\delta_\rho p\right)_S = \Phi_p^2 \Phi_{TT} \left(\Phi_{pT}^2 - \Phi_{pp}\Phi_{TT}\right)^{-1}. \end{array} \tag{4}$$

Здесь индексы в обозначении Φ представляют собой частное дифференцирование. Выражение для скорости звука получено с использованием термодинамических тождеств.

В дополнение к p, T и $\rho = \rho(p, T)$ введем набор независимых параметров, выражающихся через Φ и, следовательно, являющихся аддитивными по фазам:

$$\begin{aligned}
&\alpha_p \equiv \rho\left(\delta_T \rho^{-1}\right)_p = \rho\Phi_{pT}, \beta_T \equiv -\rho\left(\delta_p \rho^{-1}\right)_T = -\rho\Phi_{pp};\\
&c_p \equiv T\left(\delta_T S\right)_p = -T\Phi_{TT}, c'_p \equiv T\left(\delta_T c\right)_p = -T\delta_T\left(T\Phi_{TT}\right);\\
&m_{pp} \equiv \rho\left(\delta_{pp}\rho^{-1}\right)_T = \rho\Phi_{ppp} = -\left(\delta_p \beta_T\right)_T + \beta_T^2;\\
&m_{pT} \equiv -\rho\left(\delta_{pT}\rho^{-1}\right) = -\rho\Phi_{ppT} = -\left(\delta_p\alpha_p\right)_T + \alpha_p\beta_T = \left(\delta_t\beta_t\right)_p + \alpha_p\beta_T;\\
&m_{TT} \equiv -\rho\left(\delta_{TT}\rho^{-1}\right) = -\rho\Phi_{pTT} = -\left(\delta_T\alpha_p\right)_p - \alpha_p^2 = \rho T^{-1}\left(\delta_p c_p\right)_T.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь β_T — изотермический коэффициент сжимаемости. Параметры c_p и c'_p характеризуют калорические свойства среды, остальные параметры — термические. Независимость параметров следует из независимости частных производных потенциала. Полнота набора параметров соответствует полноте набора смешанных производных потенциала второго и третьего порядков. Приведенные выражения параметров m_{pp}, m_{pT}, m_{TT} через α_p, β_T, c_p удобны, например при использовании справочных таблиц. Знаки в определениях параметров выбраны таким образом, чтобы для наиболее распространенных сред параметры были неотрицательными.

Выражение для скорости звука через аддитивные параметры (5) получается непосредственно из последней формулы (4); для вывода соответствующих выражений для m, m' необходимы довольно громоздкие построения, в результате которых получим

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{a^2} = \rho\beta_T - \alpha_p^2\tfrac{T}{c_p};\\
&m = \tfrac{1}{2}\rho^2 a^4\left[m_{pp} - 3m_{pT}\left(\tfrac{\alpha_p T}{\rho c_p}\right) - 3m_{TT}\left(\tfrac{\alpha_p T}{\rho c_p}\right)^2 - \left(\tfrac{\alpha_p T}{\rho c_p}\right)^3\tfrac{\rho c'_p - \rho c_p}{T^2}\right];\\
&m' = \alpha_p T - \tfrac{1}{2}\rho a^2 T\left[m_{pT} + 2m_{TT}\left(\tfrac{\alpha_p T}{\rho c_p}\right) + \left(\tfrac{\alpha_p T}{\rho c_p}\right)^2\tfrac{\rho c'_p - \rho c_p}{T^2}\right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Полученная формулировка дифференциальной термодинамической модели произвольной двухпараметрической среды (1), (5), (6) легко обобщается на случай многофазных сред.

Концентрация фазы обычно характеризуется либо локальным массовым содержанием χ_i, равным отношению массы фазы к массе смеси, либо локальным объемным содержанием φ_i, равным отношению объема фазы к объему смеси. Вследствие отсутствия относительного скольжения фаз массовое содержание остается постоянным при движении субстанционального объема смеси, а объемное изменяется. Имеют место очевидные соотношения

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \chi_i = 1, \ \ \tfrac{1}{\rho} = \sum_i \tfrac{\chi_i}{\rho_i}, \quad \varphi_i = \chi_i \tfrac{\rho}{\rho_i} = \tfrac{\chi_i}{\rho_i}\left(\sum_i \tfrac{\chi_i}{\rho_i}\right)^{-1}; \\
&\sum_i \varphi_i = 1, \ \ \rho = \sum_i \varphi_i \rho_i, \ \ \chi_i = \varphi_i \tfrac{\rho_i}{\rho} = \varphi_i \rho_i \left(\sum_i \varphi_i \rho_i\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Термодинамические параметры, характеризующие термодинамические и калорические свойства среды, являются аддитивными по объему и массе фаз соответственно, что вытекает из аддитивности по массе потенциала Φ:

$$
\begin{aligned}
&f = \sum_i \varphi_i f_i, \ \ (f = \alpha_p, \beta_T, m_{pp}, m_{pT}, m_{TT}); \\
&g = \sum_i \chi_i g_i, \ \ \left(g = c_p, c_p', S, U, \Phi\right).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Таким образом, для формирования дифференциальной термодинамической модели многофазной среды с произвольными уравнениями состояния фаз необходимо задать наборы независимых параметров (5) для каждой фазы в отдельности по заданным концентрациям фаз χ_i, φ_i, что эквивалентно в силу (7) определению набора независимых параметров для многофазной смеси (8) и расчету значения скорости звука и других параметров согласно (6). Полученные значения определяют коэффициенты дифференциальных уравнений состояния (1) для многофазной среды.

Развитый подход к построению моделей локально равновесных многофазных сред приводит к конструктивным выражениям для термодинамических параметров многофазной среды и доставляет программно реализуемый алгоритм формирования моделей многофазных сред по данным о фазах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рыжов О.С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком всякого теплопроводящего газа // ПММ. 1965. Т. 29, №6. С. 1004–1014.