УДК 533.6.011.72:532.529

С.В. Иванов, А.Д. Ковалев

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХФАЗНЫХ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ

Возможность описания волновых процессов в многофазных средах на основе локально равновесной термодинамической модели существенно зависит от свойств фаз и гетерогенной структуры смеси. Ниже рассматривается распространенный на практике случай газожидкостных сред пузырьковой структуры. Пренебрежение скоростной неравновесностью в средах пузырьковой структуры связано с незначительным влиянием пузырьков газа на перенос массы в среде из-за малой плотности газа по сравнению с плотностью несущей жидкости. Для сред иной структуры, например газовзвесей, скоростной неравновесностью фаз (капель жидкости и несущего газа) пренебречь нельзя вследствие появления протяженных зон релаксации за ударными волнами.

В соответствии с дифференциальной формой уравнений состояния среды [1] представим соотношения Рэнкина — Гюгонио для элемента фронта ударной волны в виде

$$\begin{gathered}\frac{du}{a}=\frac{dp}{\rho a^2}, dv=0, \frac{dN}{a}=\frac{m}{2}\frac{dp}{\rho a^2}\\ \left(\frac{dp}{\rho a^2}=\frac{d\rho}{\rho}=\frac{c_p dT}{a^2\alpha_p T}=\frac{da}{(m-1)a}\right).\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь dp – скачок давления на фронте ударной волны; du, dv – изменения нормальной и тангенциальной компонент скорости; dN – отклонение скорости распространения элемента ударной волны от скорости звука перед фронтом ударной волны.

Свойства фаз газожидкостной среды зададим следующим образом: жидкость является баротропной, описывается уравнением состояния в форме Тета и имеет постоянную теплоемкость; газ в свободном состоянии является термически и калорически совершенным. Соответствующие зависимости переменных параметров от равновесных параметров p, T имеют вид

$$\begin{aligned}&\rho_1=\rho_{10}\left[1+\gamma_1\frac{p-p_0}{\rho_{10}a_{10}^2}\right]^{1/\gamma_1}, \rho_2=\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}\frac{p}{c_{p2}T};\\ &a_1=a_{10}\left(\frac{\rho_1}{\rho_{10}}\right)^{(\gamma_1-1)/2}, a_2^2=\frac{\gamma_2 p}{\rho_2}=(\gamma_2-1)c_{p2}T;\\ &\rho=\varphi_1\rho_1+\varphi_2\rho_2, \varphi_1+\varphi_2=1; \chi_i=\varphi_i\frac{\rho_i}{\rho}, (i=1,2).\end{aligned} \tag{2}$$

Определим набор независимых параметров для газожидкостной среды в соответствии с полученными в работе [1] соотношениями аддитивности:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_p = \tfrac{\varphi_2}{T}, \beta_T = \tfrac{\varphi_1}{\rho_{10} a_{10}^2} \left(\tfrac{\rho_1}{\rho_{10}}\right)^{-\gamma_1} + \tfrac{\varphi_2}{p};\\
&c_p = \chi_1 c_{p1} + \chi_2 c_{p2}, c_p' = 0;\\
&m_{pp} = \varphi_1 \tfrac{\gamma_1+1}{\rho_{10}^2 a_{10}^4} \left(\tfrac{\rho_1}{\rho_{10}}\right)^{-2\gamma_1} + \varphi_2 \tfrac{2}{p^2}, m_{pT} = \tfrac{\varphi_2}{pT}, m_{TT} = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Набор параметров (3) полностью определяет общую дифференциальную термодинамическую модель многофазной среды в случае двухфазной газожидкостной среды. Однако для целей анализа удобно провести явную подстановку набора параметров в общую модель и после преобразований получить

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\rho a^2} = \tfrac{\varphi_1}{\rho_1 a_1^2} + \tfrac{\varphi_2}{\rho_2 a_2^2} \left[1 + (\gamma_2 - 1) \tfrac{\chi_1 c_{p1}}{c_p}\right],\\
&m = \varphi_2 \tfrac{\gamma_2+1}{2} \left(\tfrac{\rho a^2}{\rho_2 a_2^2}\right)^2 \left(1 + \tfrac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1} \tfrac{\chi_1 c_{p1}}{c_p}\right) \times\\
&\times \left[1 + (\gamma_2 - 1) \tfrac{\chi_1 c_{p1}}{c_p}\right] + \varphi_1 \tfrac{\gamma_1+1}{2} \left(\tfrac{\rho a^2}{\rho_1 a_1^2}\right)^2,\\
&m' = \varphi_2 - \tfrac{1}{2} \varphi_2 \tfrac{\rho a^2}{\rho_2 a_2^2} \left[1 + (\gamma_2 - 1) \tfrac{\chi_1 c_{p1}}{c_p}\right].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Таким образом, локально равновесная модель газожидкостной среды, состоящей из жидкости с уравнением состояния в форме Тета и совершенного газа (2), описывается дифференциальными уравнениями [1] с коэффициентами (3), (4).

Выражение для скорости звука в газожидкостной среде (4) получается по общей методике [1], разработанной для многофазных сред. При этом процесс распространения возмущений рассматривается как адиабатический для смеси в целом. На практике, однако, выражение для равновесной скорости звука в газожидкостной смеси получают упрощенным способом, формулируя априорные предположения о характере процессов, происходящих при изменении объема пузырьков газа. Вследствие малости теплоемкости газа по сравнению с теплоемкостью несущей жидкости ($\chi_2 c_{p2} \ll \chi_1 c_{p1}$) при описании волновых процессов в смеси формулируется априорное предположение об изотермическом характере процессов в газе. Из полученного выражения для скорости звука (4) представления об изотермичности следуют непосредственно: при $\chi_2 c_{p2} \ll \chi_1 c_{p1}$, что эквивалентно $\chi_1 c_{p1}/c_p \sim 1$, скорость звука в смеси будет зависеть от изотермической скорости звука в газе $a_2/\sqrt{\gamma_2}$ и выражение для скорости звука в смеси примет известный вид. Аналогично представления об изотермичности возникают автоматически и при анализе распространения ударных волн, что также хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Общность и конструктивность применяемой формы дифференциальной термодинамической модели позволяют освободиться от излишних априорных предположений о характере внутренних процессов в смеси.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Иванов С.В., Ковалев А.Д.* Об одной форме дифференциальной термодинамической модели // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 107–110.

УДК 501.1

В.И. Копнина, Е.С. Губина

ИЗГИБ АНИЗОТРОПНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ

Рассмотрим упругое равновесие тонкой эллиптической анизотропной плиты, ослабленной одним эллиптическим отверстием. Центр отверстия совпадает с центром плиты. Толщина кольца равна толщине плиты h; ширина кольца достаточная, чтобы к кольцу можно было применить теорию изгиба плит.

Плита находится под действием изгибающих моментов интенсивности m, равномерно распределенных по внутреннему контуру. Внешний контур плиты жестко заделан. Определим напряженно-деформированное состояние такой плиты. Считаем материал пластинки анизотропным, обладающим одной плоскостью упругой симметрии, параллельной срединной плоскости плиты. Выберем систему координат следующим образом: пусть плоскость XOY совпадает со срединной плоскостью плиты, ось OZ направлена вертикально вниз.

Обозначим:

L_0 — внешний контур плиты — эллипс с полуосями a_0, b_0;

L_1 — внутренний контур плиты — эллипс с полуосями a_1, b_1.

Задача об изгибе такой плиты сводится к определению функций *W(x,y)*, представляющих прогиб ее срединной плоскости.

Искомые функции *W(x,y)* удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению в частных производных 4-го порядка [1]:

$$D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{26}\frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \qquad (1)$$