

Оно примерно в 3 раза больше соответствующего значения этого же момента в такой же плите, изготовленной из СВАМа.

Геометрия плиты и степень анизотропии материала влияют на перераспределение напряжений в рассматриваемой плите.

Концентрация напряжения во всех изученных случаях наблюдается вблизи контура отверстия.

Таким образом, можно считать, что полученные результаты соответствуют физической постановке задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1975.
2. *Мезлинский В.В.* Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1967. Вып. 3. С. 97–113.
3. *Копнина В.И., Щербачев А.С.* Изгиб эллиптической плиты с отверстием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 179–182.

УДК 532.5:533.6.011.5

В.С. Кожанов

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СХЛОПЫВАНИИ ПУСТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КАВЕРНЫ

Предметом исследования статьи является процесс схлопывания пустой сферической каверны в сжимаемой среде с отношением удельных теплоемкостей γ . Проведено обобщение результатов Хантера [1] для диапазона значений γ из интервала (2.4058, 8.4635).

Предполагается, что процесс схлопывания полости протекает в рамках *гомэнтропической модели*. Свойство гомэнтропии означает, что энтропийная функция $s = s(r, t)$ постоянна не только вдоль траектории частицы, но и во всей области течения (для всех траекторий). В таких условиях для описания течения достаточно двух уравнений газовой динамики [2]:

$$(c^2)_t + u(c^2)_r + (\gamma - 1)c^2(u_r + 2u/r) = 0, \quad u_t + uu_t + (c^2)_r/(\gamma - 1) = 0, \quad (1)$$

где t – время, r – координата, $u = u(r, t)$ – скорость частицы жидкости, $c^2 = c^2(r, t)$ – квадрат скорости звука.

Перейдем к автомодельной форме, определяя связи ($A = \text{const}$),

$$u = -Anr^{1-1/n}F(\eta), \quad c^2 = A^2n^2r^{2-2/n}G(\eta), \quad \eta = At/r^{1/n}. \quad (2)$$

Здесь n – показатель автомодельности, $F = F(\eta)$ и $G = G(\eta)$ – автомодельные представители функций u и c^2 соответственно, η – независимая автомодельная переменная.

Подстановка (2) в (1) дает систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно функций F и G :

$$\begin{aligned}\eta F'(\eta) &= \Delta_1/\Delta_0/(\gamma - 1) = (3n - 1)F - \Delta_5/\Delta_0/(\gamma - 1), \\ (1 + \eta F)G'(\eta) &= G\Delta_2/\Delta_0 = G[-2(1 - n)F + \Delta_5/\Delta_0],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= (1 + \eta F)^2 - \eta^2 G, \\ \Delta_5 &= (\gamma - 1)(1 + \eta F)[2n\eta F + 3n - 1]F + 2(1 - n)\eta G.\end{aligned}$$

Задача о схлопывании полости математически сводится к своеобразной задаче на собственные значения для нелинейного уравнения на фазовой плоскости переменных $V = -\eta F(\eta)$, $Z = \eta^2 G(\eta)$.

При заданном значении γ требуется найти такое n , чтобы интегральная кривая ОДУ $dZ/dV = \bar{\Delta}_2(V, Z, \gamma, n)/\bar{\Delta}_1(V, Z, \gamma, n)$, выходящая из особой точки типа *седло* $P_1(V_1 = 1, Z_1 = 0)$ вдоль сепаратрисы, проходила через особую точку типа *узел* $P_3(V_3, Z_3)$ с координатами

$$\begin{aligned}V_3 &= \left(-B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4B_2B_0}\right) / (2B_2), \quad Z_3 = (1 - V_3)^2, \\ B_1 &= \gamma - 3 - (3\gamma - 5)n, \quad B_2 = 2(\gamma - 1)n, \quad B_0 = 2(1 - n)\end{aligned}$$

вдоль уса отдельного направления. Такой проход обеспечивает аналитичность функций F и G на предельной характеристике (ПХ), которая представляет собой звуковую волну, приходящую в центр фокусировки вместе с границей полости. ПХ характеризуется значением $\eta = \eta_3$, а на фазовой плоскости VZ ей отвечает точка P_3 .

В основу расчетов были положены разложения функций F и G в окрестности ПХ $\eta = \eta_3$:

$$F = F_3 + p_i \delta^i, \quad G = G_3 + q_i \delta^i, \quad \eta = \eta_3 + \delta, \quad \delta \ll 1.$$

В таблице приведены показатель автомодельности, значения автомодельных представителей на ПХ и коэффициенты разложения p_i , q_i для пяти значений показателя адиабаты.

γ	2.41	3.0	5.0	7.0	8.46
n	0.77676398	0.70856126	0.60088048	0.55521127	0.53527898
η_3	-0.835240	-0.753657	-0.581142	-0.481214	-0.430373
F_3	0.967161	0.942845	0.869569	0.819936	0.792801
G_3	0.0529459	0.147470	0.724508	1.58293	2.34324
p_1	-0.309315	-0.364650	-0.402266	-0.392542	-0.381475
q_1	0.535782	0.928155	2.20141	3.44138	4.35758
p_2	-0.0706131	-0.0986944	-0.135258	-0.144106	-0.145698
q_2	0.0744925	0.171971	0.658430	1.30359	1.84798
p_3	-0.0300842	-0.0493061	-0.0815538	-0.0930389	-0.0968312
q_3	0.0338956	0.0947750	0.459084	0.994268	1.46585
η_{sw}	0.959757	0.670408	0.365720	0.263572	0.221756

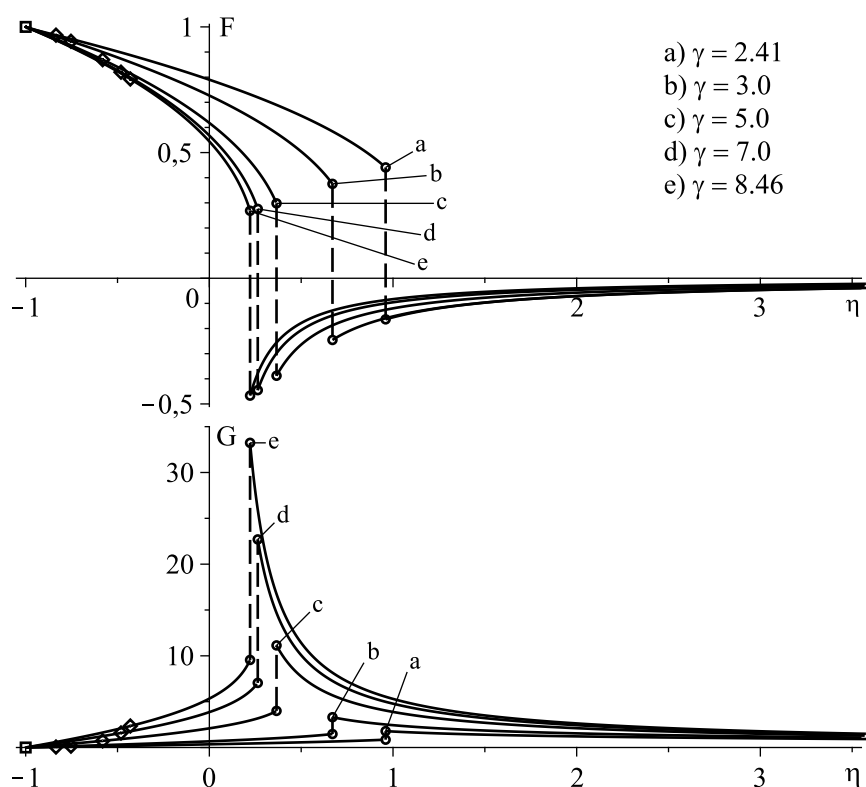
Для значений $\gamma \in (2.4058, 8.4635)$ построена интерполяционная формула, характеризующая зависимость n от γ :

$$n = \frac{-0.00098762\gamma^2 + 0.45733304\gamma + 0.62886285}{\gamma - 0.18884320}. \quad (3)$$

Максимальная относительная погрешность вычисления n по формуле (3) по сравнению со значением n , вычисляемым с использованием метода Рунге — Кутты, составляет не более $5 \cdot 10^{-3}\%$.

После фокусировки полости в центре возникает отраженная ударная волна (УВ), которая движется (от центра) навстречу набегающему на нее потоку. Предполагается такая модель отражения, что энтропия при переходе через УВ не меняется и во всей области за УВ остается равной своему первоначальному значению [1]. Основную трудность в построении решения на стадии отражения представляет определение положения ударного перехода η_{sw} .

На рисунке даны распределения автомоделльных представителей F и G (по r) на обеих стадиях течения для пяти значений γ (ПХ обозначена символом \diamond , пунктиром указано положение ударного перехода)



Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хантер К. О захлопывании пустой полости в воде // Механика: Период. сб. переводов иностр. ст. 1961. № 3 (67). С. 77–100.
2. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // УМН. 1963. Т. 18, вып. 2 (110). С. 3–23.

УДК 624.131+5539.215

А.Г. Маркушин

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИСТЕЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА С ТВЕРДЫМ ЗЕРНОМ

Сыпучее тело, отдельные зёрна которого не испытывают пластических деформаций ни при каких обстоятельствах его переработки, будем называть *твердозёрненным сыпучим материалом*, или *сыпучим телом с твёрдым зерном*. Понятно, что предел текучести отдельных зёрен подобного сыпучего тела должен быть во много раз большим предела пропорциональности самого сыпучего материала. К таким материалам относятся все каменные породы мелкой фракции, пески и т.д.

Рассмотрим истечение сыпучего тела при разгрузке бункера в форме параллелепипеда с горизонтальным выпускным отверстием в виде щели во всю длину днища бункера, расположенным у одной из его боковых