В заключение отметим, что при учете истории нагружения элемента материала были использованы пределы текучести при растяжении–сжатии динамически уложенного сыпучего тела наряду с таковыми для материала с естественной (насыпью) укладкой зерен [1]. Под динамической укладкой понимается следующее. Предполагается, что при течении материала его зерна, стремясь занять устойчивое положение, ориентируются длинными осями и утолщенными частями по направлению к отверстию и, двигаясь к нему, сближаются (регулярно укладываются), увеличивая тем самым плотность материала и пределы текучести.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Маркушин А.Г.* К построению модели истечения сыпучего тела с твердым зерном // Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующим с агрессивными средами: Материалы межвуз. науч. конф. Саратов, март 2000 г. Саратов, 2000.

2. *Биргер И.А.* Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Сер. Механика. 1965. №2. С. 113–119.

3. *Биргер И.А.* Теория пластического течения при неизотремическом нагружении // Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение. 1964. №1. 193 с.

4. *Маркушин А.Г.* Об основных деталях построения теории истечения сыпучего тела с твердым зерном // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 123–126.

5. *Шевченко Ю.А.* Термопластичность при переменных нагружениях. Киев: Наук. думка, 1970.

УДК 629

И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В работе [1] было показано, что задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА) посредством ограниченной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты, сводится к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений десятого порядка и восемью краевыми условиями, которые необходимо дополнить условиями трансверсальности и равенством $H|_{t_1} = H(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \chi,\ \mathbf{u}^0)|_{t_1} = 0$, имеющим место для оптимального управления и оптимальной траектории. Здесь $H-$ функция Гамильтона – Понтрягина; $\boldsymbol{\lambda}$ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат относительно инерциальной системы координат; $\boldsymbol{\mu}$ – кватернион, сопряженный к фазовой переменной $\boldsymbol{\lambda}$;

χ – скалярная переменная, сопряженная к истинной аномалии φ, характеризующей положение КА на орбите; $\mathbf{u}^0$ – оптимальное управление; t_1 – время, подлежащее определению управляемого движения КА.

Уравнения задачи имеют глобальные первые интегралы:

$$\begin{aligned}
&||\boldsymbol{\lambda}|| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1,\\
&\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \mathrm{const},\\
&\nu_3 + \kappa\nu_1 = \mathrm{const},\\
&(\kappa\nu_3 - \nu_1)^2 + (1+\kappa^2)\nu_2^2 = \mathrm{const},\\
&(\kappa^2 - 1)\nu_1^2 + 2\kappa\nu_1\nu_3 - \nu_2^2 = \mathrm{const},\\
&H(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \chi, \mathbf{u}^0) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь λ_j – компоненты кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$, ν_j – компоненты векторной части кватерниона $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$; $\kappa = u\dfrac{r^3}{c^2}$; $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$; r – модуль радиуса-вектора центра масс КА; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты; c – постоянная площадей.

Интегралы (1) сохраняют постоянные значения на протяжении всего интервала управляемого движения КА и обладают общим свойством: пусть $\Psi(\varphi, \kappa, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \mathrm{const}$ – один из первых интегралов (1) и при $\varphi = \tilde{\varphi}$ происходит переключение управления, тогда в случае быстродействия

$$\Psi(\tilde{\varphi}, \kappa, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \Psi(\tilde{\varphi}, -\kappa, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}). \tag{2}$$

Закон оптимального управления находится из условия максимума функции H по переменной $\mathbf{u}$ с учетом ограниченности управления ($-u_{max} \le u \le \le u_{max} < \infty$, u – алгебраическая величина реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты КА). В случае быстродействия он имеет вид

$$u = \begin{cases} u_{max}, & \nu_1 \ge 0,\\ -u_{max}, & \nu_1 < 0. \end{cases}$$

Найдены также 2 локальных интеграла уравнений задачи, которые вместе с третьим интегралом (1) определяют общее решение дифференциальных уравнений, описывающих функцию переключения управления:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k^2}\big[\nu_1 - \kappa\nu_3\big]\cos(k\varphi) - \frac{1}{k}\nu_2\sin(k\varphi) = \mathrm{const},\\
&\frac{1}{k}\nu_2\cos(k\varphi) + \frac{1}{k^2}\big[\nu_1 - \kappa\nu_3\big]\sin(k\varphi) = \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $k = \sqrt{(1+\kappa^2)}$.

Равенство (2) для интегралов (3) не выполняется, следовательно, они не являются глобальными и сохраняют постоянные значения лишь на протяжении отдельно взятых участков активного движения КА. Момент переключения управления является точкой разрыва первого рода для указанных локальных первых интегралов.

Проведенное исследование показало, что интегралы (3) являются глобальными для «вырожденной» задачи, когда сопряженные переменные $\nu_i \equiv \equiv 0, \quad i = \overline{1,3}$, а также в случае отсутствия реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты, или нулевого радиуса орбиты. Такие условия лишают задачу физического смысла, а потому неприемлемы, хотя математически вполне допустимы.

Учет первых интегралов (1) и использование в качестве новых переменных компонент ν_k кватерниона $\boldsymbol{\nu}$ позволяет, как описано в [1], понизить порядок краевой задачи (без ее усложнения) на 7 единиц и привести ее к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_1}{d\varphi} &= \nu_2, \\ \frac{d\nu_2}{d\varphi} &= -\nu_1 + \kappa\nu_3, \\ \frac{d\nu_3}{d\varphi} &= -\kappa\nu_2, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \text{const}$.

Фактически уравнения (4) являются дифференциальными уравнениями функции переключения управления.

Возможна другая постановка задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА, когда задаются начальная и конечная ориентации нормали к плоскости орбиты. Тогда появляются новые условия трансверсальности, имеющие вид

$$\text{при } t = t_1 \quad \nu_3 = 0, \quad \chi = 0.$$

Аналогичные условия имеют место в начале движения КА при $t = 0$.

С использованием этих условий трансверсальности и первых интегралов найдены формулы для нахождения неизвестных начальных значений ν_{k0} :

$$\nu_{10} = 2\frac{c}{\pm r u_{max}},$$
$$\nu_{20} = \frac{C_{31}\cos\varphi_0 + C_{32}\sin\varphi_0}{C_{31}\sin\varphi_0 - C_{32}\cos\varphi_0}\nu_{10},$$
$$\nu_{30} = 0.$$

Верхний знак берется, когда на первом активном участке движения КА управление $u = +u_{max}$, нижний – в противном случае; C_{ij} – компоненты матрицы направляющих косинусов C, которые находятся через заданные компоненты кватернионов начальной и конечной ориентаций орбиты: $C_{ij}(\Delta\mathbf{\Lambda}) = C_{ij}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^0 \circ \mathbf{\Lambda}^*)$; $\nu_{i0} = \nu_i(0), \varphi_0 = \varphi(0)$; $\mathbf{\Lambda}^0 = \mathbf{\Lambda}(0)$, $\mathbf{\Lambda}^* = \mathbf{\Lambda}(t_1)$. Кватернион $\mathbf{\Lambda}$ ориентации орбиты КА связан с фазовой переменной $\boldsymbol{\lambda}$ соотношением $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{\Lambda} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi}{2}\right)$.

Знание этих условий дает аналитическое решение задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА при втором варианте постановки задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.

УДК 629.78

Я.Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С КОМБИНИРОВАННОЙ ТЯГОЙ

В статье в переменных Кустаанхеймо — Штифеля (KS – переменных), с помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимального управления движением космического аппарата (КА), движущегося под действием большой и малой тяги, для встречи с другим КА, который движется по своей орбите под действием силы притяжения к центру гравитации. Приводятся результаты численного решения задачи для различных значений отношения максимума большой тяги к силе притяжения