$$\nu_{10} = 2\frac{c}{\pm r u_{max}},$$
$$\nu_{20} = \frac{C_{31}\cos\varphi_0 + C_{32}\sin\varphi_0}{C_{31}\sin\varphi_0 - C_{32}\cos\varphi_0}\nu_{10},$$
$$\nu_{30} = 0.$$

Верхний знак берется, когда на первом активном участке движения КА управление $u = +u_{max}$, нижний – в противном случае; C_{ij} – компоненты матрицы направляющих косинусов C, которые находятся через заданные компоненты кватернионов начальной и конечной ориентаций орбиты: $C_{ij}(\Delta\mathbf{\Lambda}) = C_{ij}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^0 \circ \mathbf{\Lambda}^*)$; $\nu_{i0} = \nu_i(0), \varphi_0 = \varphi(0)$; $\mathbf{\Lambda}^0 = \mathbf{\Lambda}(0)$, $\mathbf{\Lambda}^* = \mathbf{\Lambda}(t_1)$. Кватернион $\mathbf{\Lambda}$ ориентации орбиты КА связан с фазовой переменной $\boldsymbol{\lambda}$ соотношением $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{\Lambda} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi}{2}\right)$.

Знание этих условий дает аналитическое решение задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА при втором варианте постановки задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.

УДК 629.78

Я.Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С КОМБИНИРОВАННОЙ ТЯГОЙ

В статье в переменных Кустаанхеймо — Штифеля (KS – переменных), с помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимального управления движением космического аппарата (КА), движущегося под действием большой и малой тяги, для встречи с другим КА, который движется по своей орбите под действием силы притяжения к центру гравитации. Приводятся результаты численного решения задачи для различных значений отношения максимума большой тяги к силе притяжения к центру. С помощью предельного перехода решена задача, когда максимальное значение большой тяги неограниченно увеличивается и большая тяга становится импульсной.

1. KS-переменные $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ связаны с векторами положения $\mathbf{x}$ и скорости $\mathbf{v}$ известными соотношениями [1, 2]. Переменная h определяет полную энергию единицы массы КА. Управляемый КА движется под действием силы притяжения к центру и двух двигателей большой и малой тяги. Тяга $\mathbf{p}_1$ сравнима с силой притяжения к центру и может превышать её в несколько раз, тяга $\mathbf{p}_2$ мала по сравнению с силой притяжения к центру. Ставится задача об оптимальном управлении для встречи управляемого и неуправляемого КА. Через R обозначим характерное расстояние, например, радиус начальной орбиты управляемого КА, γ – гравитационная постоянная, M – масса центра притяжения. Связь между размерными и безразмерными переменными:

$$\mathbf{u} = R^{1/2}\mathbf{u}^*;\ \mathbf{s} = (\gamma M)^{1/2}\mathbf{s}^*;\ \ h = \frac{\gamma M}{R}h^*;\ \ \tau = \left(\frac{R}{\gamma M}\right)^{1/2}\tau^*;$$

$$I = R\left(\frac{R}{\gamma M}\right)^{1/2} I^*; t = R\left(\frac{R}{\gamma M}\right)^{1/2} t^*; \mathbf{p}_1 = \frac{\gamma M}{R^2}\mathbf{p}_1^*; \alpha_1 = \frac{R^2}{\gamma M}\alpha_1^*;$$

$$p_{1\max} = \frac{\gamma M}{R^2}p_{1\max}^*;\ \mathbf{p}_2 = p_{2\max}\mathbf{p}_2^*;\ \alpha_2 = \left(\frac{R^2}{\gamma M}\right)^2 \alpha_2^*;\ \ \frac{p_{2\max}R^2}{\gamma M} = \varepsilon << 1.$$

Далее будут использоваться только безразмерные величины, верхний индекс "$*$" над которыми опускается. Движение неуправляемого аппарата А в безразмерных KS-переменных определяется через переменную τ_a соотношениями

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_a = \mathbf{C}\cos(k\tau_a) + \mathbf{D}\sin(k\tau_a);\ \mathbf{s}_a = k\left(\mathbf{D}\cos(k\tau_a) - \mathbf{C}\sin(k\tau_a)\right);\\ k = (-0.5h_a)^{1/2};\ h_a = -(C^2 + D^2)^{-1} < 0;\\ t = \int\limits_{\tau_{\text{ан}}}^{\tau_a} (\mathbf{u}_a)^2\, d\tau_a;\ \tau_a \geq \tau;\ \mathbf{C} = \text{const};\ \mathbf{D} = \text{const}.\end{gathered} \tag{1}$$

Уравнения движения управляемого КА с учетом τ_a в безразмерных KS-переменных можно записать в виде [1, 2]

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{s};\ \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} = 0.5h\mathbf{u} + 0.5u^2P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon\mathbf{p}_2);\ \frac{dh}{d\tau} = 2\left(\mathbf{s},\ P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon\mathbf{p}_2\right);\\ \frac{d\tau_a}{d\tau} = \frac{u^2}{(\mathbf{u}_a(\tau_a))^2}, \frac{dt}{d\tau} = u^2.\end{gathered} \tag{2}$$

Функционал, который для оптимального процесса должен принимать минимальное значение, в безразмерных переменных имеет вид

$$I = \int\limits_0^{\tau_k} \left[\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2 \alpha_2 \mathbf{p}_2^2\right] \mathbf{u}^2 d\tau, \ |\mathbf{p}_1| \le p_{1\,\max}, \ |\mathbf{p}_2| \le 1\,. \tag{3}$$

Начальное состояние управляемого КА и начальное значение τ_a определяются соотношениями при $\tau = 0$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{н}}, \ \mathbf{s} = \mathbf{s}_{\text{н}}, \ h = h_{\text{н}}, \ \tau_a = \tau_{a\text{н}}. \tag{4}$$

В конечный "момент времени" $\tau = \tau_{\text{k}}$, который заранее не задается, управляемая система (2) в пространстве $(\mathbf{u}, \mathbf{s}, h, \tau_a)$ в случае мягкой встречи должна находиться на многообразии

$$\begin{gathered} P^T(\mathbf{u}(\tau_k))\mathbf{u}(\tau_k) = P^T(\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k)))\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k)); \\ P^T(\mathbf{u}(\tau_k))\mathbf{s}(\tau_k) = P^T(\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k)))\mathbf{s}_a(\tau_a(\tau_k)). \end{gathered} \tag{5}$$

2. Функция Гамильтона — Понтрягина для системы (2) имеет вид

$$\begin{gathered} H = -(\alpha_0 + \alpha_1|\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2\alpha_2\mathbf{p}_2^2)u^2 + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + \\ + \big(\boldsymbol{\nu}, 0.5h\mathbf{u} + 0.5u^2 P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon\,\mathbf{p}_2)\big) + \\ +2\eta(\mathbf{u}, P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon\,\mathbf{p}_2)) + \vartheta u^2 \left(\mathbf{u}_a\left(\tau_a\right)\right)^{-2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Сопряженные переменные $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3), \boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3), \eta, \vartheta$ удовлетворяют системе сопряженных уравнений. Согласно условию максимума оптимальное управление $\mathbf{p}_{1opt}$ и $\mathbf{p}_{2opt}$ выражается через фазовые и сопряженные переменные, их направления совпадают с направлением вектора $P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}$, где $\mathbf{q} = 0.5u^2\boldsymbol{\nu} + 2\eta\mathbf{s}$. На правом подвижном конце траектории при $\tau = \tau_k$ должны выполняться условия трансверсальности. В случае мягкой встречи они имеют вид

$$l(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) + l(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{s}) = 0; \ \ l(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}) = 0; \ \ \eta = 0; \ \ \vartheta + (\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}) + 0.5h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) = 0. \tag{7}$$

Кроме того, так как τ_k заранее не задается, то при $\tau = \tau_k$ $\quad H_{opt}|_{\tau_k} = 0$.

Принцип максимума сводит решение задачи оптимального управления к решению краевой задачи для фазовых и сопряженных переменных.

3. При неограниченном возрастании $p_{1\,\max}$ решение рассмотренной выше задачи будет стремиться к решению задачи об оптимальном управлении движением КА с импульсной тягой и малой тягой $\mathbf{p}_2$ [3]. Момент сообщения импульса тяги τ_i определяется из условия $\left|P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}\right| = = \alpha_1 u^2$.

Направление вектора импульса тяги совпадает с направлением вектора $P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}$. Из уравнений для фазовых и сопряженных переменных следует, что при предельном переходе к импульсной тяге в момент сообщения импульса переменные $\mathbf{u}$, τ_a, η, ϑ, $\mathbf{q}$ остаются непрерывными, а переменные $\mathbf{s}$, h, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ испытывают скачки, величины которых определяются по формулам, полученным с помощью предельного перехода.

Ниже в таблице в безразмерных переменных приведены результаты расчетов для различных значений $p_{1\max}$ для мягкой встречи управляемого космического аппарата, находящегося на орбите Земли, с аппаратом, который движется по орбите Марса. Угол, на который в начальный момент времени сдвинут аппарат, находящийся на орбите Марса, относительно управляемого аппарата равен 60°. Расчеты проведены для следующих значений безразмерных весовых множителей $\alpha_0 = 1.0$, $\alpha_1 = 0.75$, $\alpha_2 = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$. Расчеты показали, что двигатели с тягой $\mathbf{p}_1$ включаются в начале и в конце процесса управления.

$p_{1\max}$	t_{p1}	t_{p2}	t_k	$\Delta t_1 + \Delta t_2$	I_2	I
1.0	0.33890	1.58098	2.09403	0.85195	0.99503	2.83250
5.0	0.09728	1.49339	1.63462	0.23851	0.43657	2.57269
10.0	0.05243	1.47753	1.55160	0.12550	0.35859	2.52875
25.0	0.02130	1.46729	1.49780	0.05181	0.31487	2.50072
∞	0.0	1.45998	1.45998	0.0	0.28716	2.48121

В таблице t_{p1} – момент выключения тяги $\mathbf{p}_1$, t_{p2} – момент включения тяги $\mathbf{p}_1$ на втором этапе, t_k – общее время процесса управления, $\Delta t_1 + \Delta t_2$ – суммарное время движения аппарата на первом и втором этапах с включенной тягой $\mathbf{p}_1$, $I_2 = \int\limits_0^{\tau_k} \mathbf{p}_2^2 \mathbf{u}^2 d\tau$, I – значение функционала (3). В последней строке приведены результаты для предельного случая, когда тяга $\mathbf{p}_1$ заменена импульсным двигателем, который включается в начальный и конечный моменты времени. Безразмерная величина начального импульса равна 0.54554, а величина конечного равна 0.77782.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Штифель Е., Шейфиле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975.

2. *Сапунков Я.Г.* Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космические исследования. 1996. Т. 34, вып. 4. С. 428–433.

3. *Ильин В.А., Кузмак Г.Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука, 1976.