УДК 531.38

Г.Д. Севостьянов

К КИНЕМАТИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

В статье найдены новые решения уравнений кинематики твердого тела с неподвижной точкой, записаны уравнения для угла нутации в случае вращения самолета, искусственного спутника Земли (ИСЗ), качки корабля; рассмотрена теорема Гамильтона — Ишлинского о телесном угле в неоднородном случае.

В кинематической задаче Дарбу [1] для твердого тела с неподвижной точкой требуется аналитически определить изменение трех углов Эйлера тела, если известно изменение мгновенной угловой скорости в связанной с телом системе координат. Три нелинейных кинематических уравнения Эйлера [1] и три линейных уравнения Пуассона (полученных впервые также Л. Эйлером [2, с. 62]) приведены к уравнению второго порядка для угла нутации [3, 4]:

$$s^2 + s'^2 + \left(\frac{s'' + s}{\sigma(\tau)}\right)^2 = 1, |s| \leq 1, \tag{1}$$

где $s(\tau) = \cos\theta$, θ – угол нутации; $\tau = \int\limits_0^t \Omega(t)dt$ – интегральное безразмерное время; $\Omega^2 = p^2 + q^2$; $\overline{\omega}(p, q, r)$– мгновенная известная угловая скорость тела в связанной с телом системе координат xyz; $\sigma(\tau)$ – известная функция:

$$\sigma(\tau) = \frac{r}{\Omega} + \chi', \chi = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}. \tag{2}$$

Три угла Эйлера φ, ψ, θ (φ – угол собственного вращения, ψ – угол прецессии) определяют ориентацию тела в основной системе координат ξ, η, ζ.

Если $s(\tau)$ найдена из (1), то два других угла Эйлера (φ, ψ) найдем из равенств [4]:

$$\begin{gathered} \cos(\varphi + \chi) = \theta'(\tau); \\ \psi' = \pm\frac{s'' + s}{|\sigma|(1 - s^2)}. \end{gathered} \tag{3}$$

Если заданы $p(t), q(t)$ и $\theta(t)$, то можно найти $s(\tau)$, тогда из (1) определим $\sigma(\tau)$, из (2) – r, из (3) – углы φ и ψ, а из динамических уравнений Эйлера — момент внешних сил относительно неподвижной точки [3]. Приведем некоторые частные решения.

Если $s(\tau) = \operatorname{th}(\tau + c)$, то из (2) имеем $\sigma(\tau) = \operatorname{ch}(\tau + c) - \frac{2}{\operatorname{ch}(\tau+c)}$, при этом скорость вращения тела возрастает , ось тела z приближается к неподвижной оси ζ основной системы $\xi\eta\zeta$.

Если выбрать

$$s(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} e^{-\alpha(\tau+c)}; c, \alpha > 0,$$

то

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{-1+e^{2\alpha(\tau+c)}}},$$

ось z тела заваливается относительно оси ζ.

Углы φ и ψ можно найти из (3).

Введенные Эйлером углы φ, ψ, θ используются в небесной механике и удовлетворяют кинематическим уравнениям Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для самолета кинематические уравнения [5] можно формально получить, если за основную систему координат выбрать нормальную $OX_gY_gZ_g$ (местную географическую) и сделать в (4) замены:

$$\begin{aligned} &p \to -\omega_z, q \to \omega_y, r \to \omega_x, \\ &\varphi \to \gamma, \psi \to \Psi, \theta \to \frac{\pi}{2} - \vartheta, \\ &x \to -Z, y \to Y, z \to X, \end{aligned} \tag{5}$$

где γ, ψ, ϑ – углы крена, рыскания и тангажа соответственно связанной системы $OXYZ$; $\overline{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Тогда в уравнении (1) для самолета $s(\tau) =$ $= \sin\vartheta$,

$$\begin{aligned} &\Omega^2 = \omega_y^2 + \omega_z^2, \\ &\sigma(\tau) = \frac{\omega_x}{\Omega} + \chi', \chi = \operatorname{arctg}\frac{\omega_y}{\omega_z}. \end{aligned} \tag{6}$$

Совпадают по виду с самолетными уравнениями кинематические уравнения Эйлера для искусственного спутника (ИС) и космического аппарата (КА) [6] относительно орбитальной базовой системы координат (относительно абсолютной геоцентрической системы в координаты угловой скорости вносятся поправки на движение ИС и КА по траектории).

Для описания качки корабля используется левая система координат (ось $O\zeta$ направлена вертикально вниз; связанная ось OZ_k идет вниз в плоскости симметрии, OY_k направлена к левому борту). Для углов Эйлера, введенных А.Н. Крыловым ($\theta_k, \psi_k, \varphi_k$ – углы крена, дифферента и рыскания корабля соответственно), кинематические уравнения получаются из (4), если сделать замены:

$$\begin{aligned} &p \to -\omega_x, q \to \omega_y, r \to -\omega_z, \\ &\varphi \to -\varphi_k, \psi \to \psi_k, \theta \to \frac{\pi}{2} - \theta_k, \\ &x \to -X_k, y \to Y_k, z \to -Z_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда в (1) для корабля $s(\tau) = \sin\theta_k$, $\Omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$,

$$\sigma(\tau) = -\frac{\omega_z}{\Omega} + \chi', \chi = -\operatorname{arctg}\frac{\omega_y}{\omega_x}. \tag{8}$$

Если $r(t) = \dot{\varphi}_z$ – известная функция, теорему Гамильтона — Ишлинского рассмотрим в неоднородном случае.

Возьмем на замкнутой траектории некоторой точки оси z на неподвижной сфере радиуса R две близкие точки B и C и полюс сферы A внутри траетории, через который проходит неподвижная ось ζ. Строим узкий сферический треугольник ABC. Площадь его $|dF| = R^2 \cdot (B + C + A - \pi)$, где $A = |d\psi|$, B и C – его углы. Прилегающие к углу A стороны равны: $b = \theta$ и $c = \theta + d\theta$.

Из сферической геометрии [7, с. 53] имеем аналогию Непера:

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}} \approx \frac{2}{\cos\theta|d\psi|}.$$

Тогда

$$\frac{B+C}{2} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos\theta}{2}|d\psi|, |dF| = R^2(1-\cos\theta)|d\psi|.$$

Но из (4): $d\varphi = d\varphi_z - \cos\theta d\psi = d\varphi_z + \frac{|dF| sign\psi}{R^2} - d\psi$.
На замкнутой траектории $\Delta\psi = 2\pi sign\psi$, тогда

$$\Delta\tilde{\varphi} = \left(\frac{|F|}{R^2} - 2\pi\right) sign\psi; \tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_z.$$

Угол поворота тела около оси z при обходе замкнутой траектории:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_z + \left(\frac{|F|}{R^2} - 2\pi\right) sign\psi.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1961.

2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978.

3. *Севостьянов Г.Д.* О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195–198.

4. *Севостьянов Г.Д.* Уравнение для угла нутации в кинематике тела с неподвижной точкой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 223–225.

5. Аэромеханика самолета: Динамика полета / Под ред. А.Ф. Бочкарева и В.В. Андреевского. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1985.

6. Основы испытаний летательного аппарата / Под общ. ред. Е.И. Кринецкого. М.: Машиностроение, 1989.

7. *Корн Г., Корн Т.* Определения, теоремы, формулы: Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.

УДК 532.5:533.6.011.5

И.А. Чернов

ГОМЭНТРОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИЛЬНОГО ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

Обсуждается частный случай движения сильной ударной волны по покоящемуся газу с нулевым давлением, но с переменной плотностью. Плотность описывается степенной зависимостью от расстояния до центра взрыва. Предлагается такой выбор показателя степени в этой зависимости, чтобы энтропия во всей области течения после прохождения ударной волны была постоянной. При этом получается качественно другое по сравнению с классическим случаем поведение температуры.

Введение. Задача о сильном точечном взрыве в автомодельной постановке была решена Л.И. Седовым [1] и Тейлором (см. [1, 2]). Ударная волна (УВ) возникает в результате выделения конечной энергии в точке пространства. Эта энергия передается движущемуся газу и является характерной и постоянной величиной данного физического процесса, что позволило найти [1] интеграл сложной системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (ОДУ). Соответствующее решение содержит два параметра: $\gamma = c_p/c_v$ – отношение удельных теплоемкостей и ω – показатель степени в автомодельном представлении плотности $\rho = \rho_0 t^\omega R(\xi)$, где t – время, $\xi = r/(Kt^n)$ – независимая автомодельная переменная (r – пространственная координата, K – масштабная константа). Сильный взрыв в покоящемся газе предполагает нулевое давление до УВ, что обеспечивает автомодельность задачи.