

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1961.
2. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978.
3. Севостьянов Г.Д. О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195–198.
4. Севостьянов Г.Д. Уравнение для угла нутации в кинематике тела с неподвижной точкой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 223–225.
5. Аэромеханика самолета: Динамика полета / Под ред. А.Ф. Бочкарева и В.В. Андреевского. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1985.
6. Основы испытаний летательного аппарата / Под общ. ред. Е.И. Кринецкого. М.: Машиностроение, 1989.
7. Корн Г., Корн Т. Определения, теоремы, формулы: Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.

УДК 532.5:533.6.011.5

И.А. Чернов

ГОМЭНТРОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИЛЬНОГО ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

Обсуждается частный случай движения сильной ударной волны по покоящемуся газу с нулевым давлением, но с переменной плотностью. Плотность описывается степенной зависимостью от расстояния до центра взрыва. Предлагается такой выбор показателя степени в этой зависимости, чтобы энтропия во всей области течения после прохождения ударной волны была постоянной. При этом получается качественно другое по сравнению с классическим случаем поведение температуры.

Введение. Задача о сильном точечном взрыве в автомоделной постановке была решена Л.И. Седовым [1] и Тейлором (см. [1, 2]). Ударная волна (УВ) возникает в результате выделения конечной энергии в точке пространства. Эта энергия передается движущемуся газу и является характерной и постоянной величиной данного физического процесса, что позволило найти [1] интеграл сложной системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (ОДУ). Соответствующее решение содержит два параметра: $\gamma = c_p/c_v$ – отношение удельных теплоемкостей и ω – показатель степени в автомоделном представлении плотности $\rho = \rho_0 t^\omega R(\xi)$, где t – время, $\xi = r/(Kt^n)$ – независимая автомоделная переменная (r – пространственная координата, K – масштабная константа). Сильный взрыв в покоящемся газе предполагает нулевое давление до УВ, что обеспечивает автомоделность задачи.

Обсудим вопрос о выборе ω . В работах [1, 2] положено $\omega = 0$ на том основании, что в покоящейся среде, по которой распространяется УВ, плотность постоянна и равна ρ_0 . Заметим, что такой выбор ω означает вырожденность функции $\rho(t, \xi)$, поскольку $\partial\rho(t, \xi)/\partial t = 0$ как до, так и после УВ, тогда как $p(t, \xi)$ – функция общего вида. В результате поведение температуры оказывается нефизичным: она растет до бесконечности после прохождения УВ через фиксированную точку пространства вместо того, чтобы уменьшаться. Заметим, что автомодельное решение должно правильно отражать лишь основные черты реального течения, его недостатки обычно устраняют за счет построения асимптотического ряда.

Ниже обсуждается другая теоретическая возможность: показатель ω выбирается из условия $\partial s(t, \xi)/\partial t = 0$ – это условие гомэнтропии. Физически это означает, что энтропия меняется скачком на УВ одинаково для всех траекторий, и следует рассматривать также другой, отличный от классического, предельный случай описания данного явления.

Если оставаться в рамках традиционного подхода, то представленные результаты можно трактовать как частный случай движения сильной УВ по покоящемуся газу с нулевым давлением, но с переменной по пространству начальной плотностью.

Основные уравнения и решение Седова. Изучаются одномерные неустановившиеся адиабатические течения идеального совершенного газа для трех случаев симметрии течения. Течение характеризуется скоростью $u = u(r, t)$, плотностью $\rho = \rho(r, t)$ и квадратом локальной скорости звука $c^2 = c^2(r, t)$, который с точностью до коэффициента совпадает с абсолютной температурой ($\nu = \{1, 2, 3\}$ для {плоской, цилиндрической, сферической} симметрий потока). Основные уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho + \rho \frac{\partial}{\partial r}u + \frac{(\nu - 1)\rho u}{r} = 0, \quad \gamma \frac{d}{dt}u + \frac{\partial}{\partial r}c^2 + c^2 \frac{\partial}{\partial r} \ln(\rho) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{r c^2}{\rho^{\gamma-1}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагая автомодельность, зададим искомые функции в форме ($m = 1/n$, $w = \omega/n$):

$$\begin{aligned} u = \frac{K^m r^{1-m} U1(\eta)}{m}, \quad \rho = \rho_0 r^w R1(\eta), \quad c^2 = \frac{K^{2m} r^{2-2m} Z1(\eta)}{m^2}, \\ t = K^{-m} \eta r^m. \end{aligned} \quad (2)$$

Для автомодельных представителей (по r) {скорости, плотности и квадрата скорости звука}, то есть для $\{U1, R1, Z1\}$, получим систему трех ОДУ.

Если УВ сильная и распространяется по неподвижному газу с $\{U_{11} = 0, Z_{11} = 0, R_{11} = \rho_0 = 1\}$, то позади нее ($\eta = 1$ – ее форма) имеем значения

$$U_{12} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad Z_{12} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}, \quad R_{12} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1},$$

которые являются начальными условиями при решении системы ОДУ.

Чтобы иметь возможность сравнения результатов с результатами классического подхода [1, 2], рассмотрим наряду с (2) традиционные формулы

$$r = Kt^n \xi, \quad u = nKt^{n-1} \xi U(\xi), \quad \rho = \rho_0 t^\omega R(\xi), \quad c^2 = n^2 K^2 t^{2n-2} \xi^2 Z(\xi). \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), легко получить соотношения

$$\xi = \eta^{-n}, \quad U(\xi) = \eta U_1(\eta), \quad Z(\xi) = \eta^2 Z_1(\eta). \quad (4)$$

Две функции $U(\xi)$, $Z(\xi)$ параметрически представляют решение ОДУ первого порядка для $Z = Z(U)$ – фазовая плоскость. Для функции $Z = Z(U)$ имеем ОДУ:

$$\frac{dZ(U)}{dU} = \frac{\Delta_3(U, Z(U), \nu, \gamma, \omega, n)}{\Delta_1(U, Z(U), \nu, \gamma, \omega, n)}. \quad (5)$$

Качественный анализ (5) содержится в [1].

Рассмотрим полную (в единице массы газа) энергию жидкого объема

$$e = c_v T + \frac{u^2}{2}.$$

В работе [1] показано, что условию $\partial e(t, \xi)/\partial t = 0$ соответствует равенство

$$\omega = 2 - n(\nu + 2) \quad (6)$$

и уравнение (5) имеет частное решение Седова:

$$Z = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma U^2 (U - 1)(\gamma - 1)}{\gamma U - 1}. \quad (7)$$

Если в дополнении к (5) потребовать выполнения условия независимости плотности от времени (ξ фикс.), как в [1, 2], то $\omega = 0$, и из (6) получим $n = 2/(\nu + 2)$, то есть $n = \{2/3, 1/2, 2/5\}$ при $\nu = \{1, 2, 3\}$ и любом γ , если – энтропийной функции, то

$$\omega = \frac{2(n - 1)}{\gamma - 1}. \quad (8)$$

Совместное выполнение (6) и (8) дает

$$n = \frac{2\gamma}{\gamma\nu - \nu + 2\gamma}.$$

При $\gamma = 7/5$ получим $n = \{7/8, 7/9, 7/10\}$ для $\nu = \{1, 2, 3\}$ [3].

На приведенных рис. 1 – 4 изображено поведение автомодельных представителей $\{U1, R1, Z1, S1\}$ в зависимости от η . Расчет кривых 1 проведен для ($\nu = 3, \omega = 0, \gamma = 7/5, n = 2/5$), кривых 2 – для ($\nu = 3, \omega = 3/2, \gamma = 7/5, n = 7/10$).

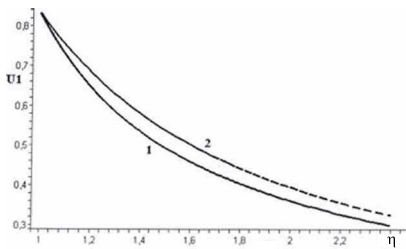


Рис. 1

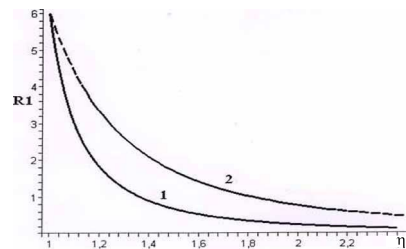


Рис. 2

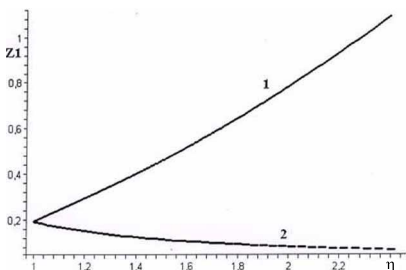


Рис. 3

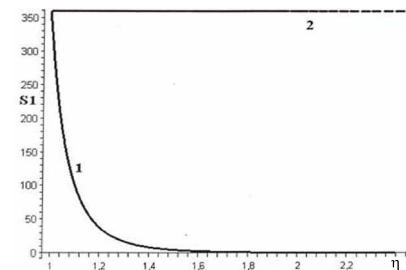


Рис. 4

На рис. 3 видно различие в поведении температуры: в классическом случае она растет после прохождения УВ (с течением времени в фиксированной точке пространства), в гомэнтропической модели – падает. На рис. 4 показано разное поведение представителя энтропийной функции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
2. *Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В.* Теория точечного взрыва. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит-ры, 1961. 332 с.
3. *Чернов И.А.* К автомодельной задаче о сильном точечном взрыве. Саратов, 2009. 24 с. Деп. в ВИНТИ РАН 05.05.2009, № 289-В2009.