

С.П. Шевырев

## РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ДАВЫДОВА (НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ)

Течение тяжелой несжимаемой невязкой жидкости для случая двух пространственных переменных моделируется путем решения краевых задач для системы уравнений Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= F_y, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $u$ ,  $v$  – компоненты вектора скорости,  $p$  – нормированное (поделенное на постоянную плотность) давление,  $F_y$  – сила тяжести.

На теле ставится условие непротекания (нормальная компонента скорости равна нулю), на свободной поверхности – давление равно атмосферному.

В принципе, из исходной системы можно получить уравнение Пуассона для давления [1, 2], которое должно решаться на каждом шаге по времени:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = - \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$$

или

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

и т.д. Однако эти уравнения носят академический интерес и не годятся для практических расчетов. Если не выполняется разностное уравнение для дивергенции в каждый момент времени, то течение быстро вырождается и становится сжимаемым [1].

Для решения подобных задач воспользуемся методом Давыдова [3, 4]. Рассмотрим случаи регулярной и нерегулярной (треугольной) сеток.

**Регулярная сетка.** Пусть

$$\tilde{D} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \tag{1}$$

– дивергенция вектора скорости на эйлеровом этапе, играющая ключевую роль в расчетах несжимаемой жидкости. Дивергенция должна равняться нулю в любой момент времени на любом этапе расчета как в дифференциальной форме, так и в разностной.

Выпишем дивергенцию вектора скорости в разностном виде

$$\tilde{D}_{i,j}^n = \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j}^n - \tilde{u}_{i-1/2,j}^n}{h_x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+1/2}^n - \tilde{v}_{i,j-1/2}^n}{h_y}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \frac{\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n}{2} \text{ и т.д.};$$

$$\tilde{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \frac{\tau}{2h_x}(p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n) \text{ и т.д.}; \quad (3)$$

$$\tilde{v}_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \frac{\tau}{2h_y}(p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n) - \tau g_y \text{ и т.д.} \quad (4)$$

Итак,

$$\tilde{D}_{i,j}^n = 0. \quad (5)$$

Подставляя в левую часть (5) выражения из (2), (3), (4) и принимая для сокращения выкладок  $h_x = h_y = h$ , получим

$$\frac{4h^2}{\tau} D_{i,j}^n = (p_{i-2,j} + p_{i,j-2} + p_{i+2,j} + p_{i,j+2} - 4p_{i,j}), \quad (6)$$

где  $D_{i,j}^n$  – разностная дивергенция в ячейке  $(i, j)$  на  $n$ -м полном шаге по времени.

Полученный шаблон изображен на рис. 1.

Разрешая (6) относительно  $p_{i,j}$ , получим матричное уравнение для давления:

$$p_{i,j} = \frac{1}{4}(p_{i-2,j} + p_{i,j-2} + p_{i+2,j} + p_{i,j+2}) - \frac{h^2}{\tau} D_{i,j}^n. \quad (7)$$

Формула (7), кроме нахождения давления, обнуляет дивергенцию  $\tilde{D}_{i,j}^n$  на эйлеровом этапе каждого временного шага и таким образом не дает накапливаться неизбежным вычислительным ошибкам. Обнуление дивергенции  $D_{i,j}^n$  в конце всего вычислительного цикла одного временного шага – гораздо более сложный процесс, так как схема метода Давыдова – с переключениями. В зависимости от направления потока через расчетную ячейку мы имеем фактически 16 вариантов разностных схем в двумерном случае.

Численное решение (7) и уравнений движения осложняется следующими обстоятельствами.

1. Часть границы (свободная поверхность) неизвестна и определяется в результате расчетов на основе методики из работы [1]. На свободной поверхности давление будем полагать равным атмосферному.

2. Количество расчетных ячеек меняется на каждом шаге по времени.

Справиться с такими проблемами помогают маркеры [1, 2] – виртуальные частицы, не влияющие на расчеты, а лишь показывающие положение свободной поверхности, перемещение частиц жидкости и другие детали течения. Жидкость «не чувствует» маркеров и переносит их «на себе». Таким образом, маркеры фактически иллюстрируют лагранжев подход в исследовании течений.

Решение уравнения (7) должно проводиться на каждом шаге по времени.

Компоненты вектора скорости традиционно получаются с помощью трех этапов (эйлеров, лагранжев, заключительный) метода Давыдова.

**Нерегулярная треугольная сетка.** Треугольная (в трехмерном случае – четырехгранная) сетка позволяет легко рассчитывать тела со сложной образующей, естественным образом ставить граничные условия для невязкой жидкости (условие непротекания), зато требует предварительного разбиения расчетной области на треугольники (триангуляция). Задача триангуляции весьма стандартна, хорошо алгоритмизируема и не является серьезной проблемой.

Исходные дифференциальные уравнения – те же, что и для регулярной сетки, разностные уравнения для компонент вектора скорости и давления сложнее, чем в случае регулярной сетки. Эйлеров, лагранжев и заключительный этапы для компонент скорости на треугольной сетке рассматривались в [5], поэтому подробнее рассмотрим получение и решение уравнения для давления. Как и в случае с регулярной сеткой, эти проблемы решаются внутри эйлерова этапа.

Разностные уравнения эйлерова этапа имеют вид

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n - \left( \frac{\Delta p}{\Delta x} \right)_i, \quad (8)$$

$$\tilde{v}_i^n = v_i^n - \left( \frac{\Delta p}{\Delta y} \right)_i, \quad (9)$$

где [5]

$$\left( \frac{\Delta p}{\Delta x} \right)_i = \frac{(p_{k_2} + p_{k_1})(y_{k_2} - y_{k_1}) + (p_{k_3} + p_{k_2})(y_{k_3} - y_{k_2}) + (p_{k_1} + p_{k_3})(y_{k_1} - y_{k_3})}{(x_{k_2} + x_{k_1})(y_{k_2} - y_{k_1}) + (x_{k_3} + x_{k_2})(y_{k_3} - y_{k_2}) + (x_{k_1} + x_{k_3})(y_{k_1} - y_{k_3})}, \quad (10)$$

$$\left( \frac{\Delta p}{\Delta y} \right)_i = - \frac{(p_{k_2} + p_{k_1})(x_{k_2} - x_{k_1}) + (p_{k_3} + p_{k_2})(x_{k_3} - x_{k_2}) + (p_{k_1} + p_{k_3})(x_{k_1} - x_{k_3})}{(x_{k_2} + x_{k_1})(y_{k_2} - y_{k_1}) + (x_{k_3} + x_{k_2})(y_{k_3} - y_{k_2}) + (x_{k_1} + x_{k_3})(y_{k_1} - y_{k_3})}. \quad (11)$$

Здесь  $k_1, k_2, k_3$  – номера треугольников, соседних с треугольником с номером  $i$ . Обход «соседей» происходит против часовой стрелки.

Необходимая нам дивергенция в случае треугольной сетки выглядит так [5]:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i^n &= \left( \frac{\Delta \tilde{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta \tilde{v}}{\Delta y} \right)_i = \\ &= \frac{1}{(x_{k_2} + x_{k_1})(y_{k_2} - y_{k_1}) + (x_{k_3} + x_{k_2})(x_{k_3} - y_{k_2}) + (x_{k_1} + x_{k_3})(y_{k_1} - y_{k_3})} \times \\ &\times \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \tilde{u}_{k_{j+1}}^n + \tilde{u}_{k_j}^n \right) (y_{k_{j+1}} - y_{k_j}) - \left( \tilde{v}_{k_{j+1}}^n + \tilde{v}_{k_j}^n \right) (x_{k_{j+1}} - x_{k_j}) \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь  $u_{k_4} = u_{k_1}, v_{k_4} = v_{k_1}, x_{k_4} = x_{k_1}, y_{k_4} = y_{k_1}$ .

Ввиду неструктурированности разностной сетки у искомым дискретных величин, имеется один индекс, означающий номер крупной частицы в расчётном поле.

Теперь из (8), (9), (12) необходимо составить алгоритм вычисления давления в треугольнике с номером  $i$  таким образом, чтобы дискретный аналог дивергенции (12) точно обращался в ноль. Формулы (8), (9), (12) справедливы для всех внутренних точек, в том числе для соседних с  $i$ -й точкой точек  $k_1, k_2, k_3$ , причем в каждой из них одним соседом является  $i$ -я точка. Подставляя в (12) выражения для точек  $k_1, k_2, k_3$  и приравнявая (12) к нулю, получаем выражение, аналогичное (7), но гораздо более сложное. Проще решить эту проблему алгоритмически, создавая целочисленные квадратные матрицы порядка 4, хранящие конфигурацию, изображенную на рис. 2, либо решая нелинейное уравнение (12) относительно  $p_i$ .

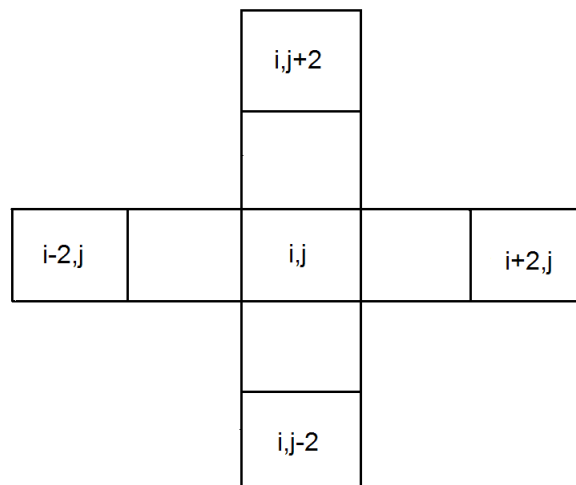


Рис. 1. Шаблон на регулярной сетке для вычисления давления

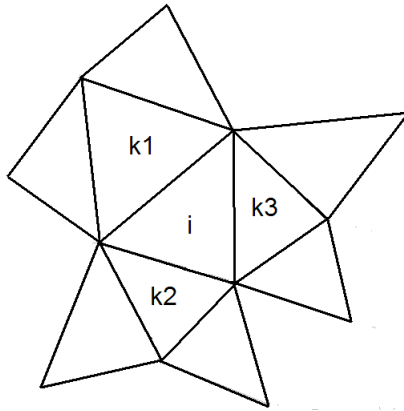


Рис. 2. Шаблон на нерегулярной сетке для вычисления давления (участвуют десять треугольников)

Для решения стационарных задач методом установления процесс вычисления давления можно сильно упростить. Для этого вместо уравнения неразрывности рассмотрим следующее нестационарное уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Когда в процессе установления давление  $p$  с помощью численного решения последнего уравнения выйдет на стационарный режим, то и исходное уравнение неразрывности будет автоматически выполняться. Уравнение Пуассона здесь решать не надо.

В качестве примера решены нестационарные задачи о размыве основания плотины и об истечении из сосуда. Применялись регулярная и нерегулярная сетки. На рис. 3 изображена расчетная область, покрытая нерегулярной треугольной сеткой, на рис. 4 – результаты расчета на этой сетке (показаны маркеры). Для первой задачи вправо распространяется волна с гребнем, во второй задаче образуется закрученная струя.

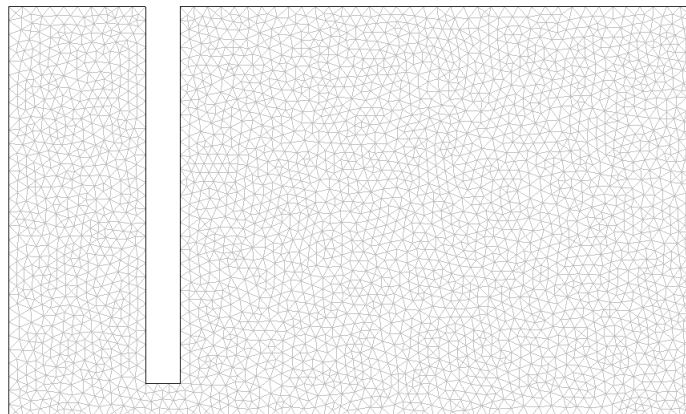


Рис. 3. Расчетная область с треугольной сеткой

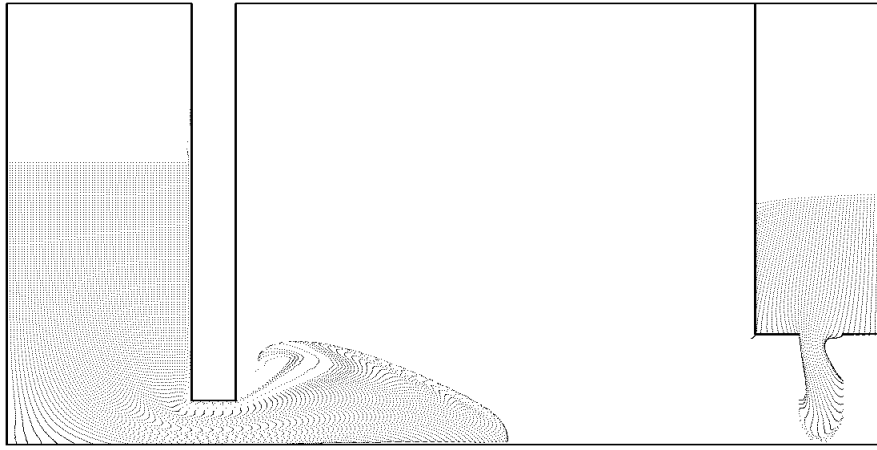


Рис. 4. Прорыв плотины и истечение из сосуда

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости: В 2 т. М.: Мир, 1991.
3. Математическая энциклопедия: В 5 т. М.: Сов. энцикл., 1982. Т. 3.
4. Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1988.
5. Шевырев С.П. Разностные схемы метода Давыдова на произвольной сетке // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 205–209.

УДК 533.6.0116:532.529

**Г.П. ШИНДЯПИН, А.А. МАТУТИН, О.А. МАТУТИНА**

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГЖС

При падении ударной волны  $AR(BR)$  относительной интенсивности  $\Delta p/\rho_0 c_0^2$ , под углом  $\alpha$  к вертикали на свободную поверхность  $KA$ , разделяющую ГАЗ/ГАЗ, ГАЗ/ГЖС, ГЖС/ГЖС, с газосодержаниями  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  возникают различные режимы рефракции:  $RR$  – регулярный (рис. 1),  $NR$  – нерегулярный (рис. 2),  $RW$  – регулярный с отраженной ударной волной (УВ) (рис. 3) и др., характеризующиеся фронтом преломленной волны  $AD$  и разрежением  $AB_K B_1$  или отраженной УВ  $AC$ . Параметр  $q^+$ , характеризующий интенсивность преломленной волны одновременно характеризует интенсивность волны разрежения или отраженной УВ ( $\varepsilon_{20} = \varepsilon_{30}$ ).