возможность проанализировать взаимосвязь проблем разрешимости [3] элементарных теорий классов универсальных упорядоченных полуавтоматов и классов полугрупп.

Для формального языка L некоторой сигнатуры Ω символом P_L обозначим множество всех предложений этого языка. Теория T языка L называется *разрешимой*, если существует алгоритм для решения вопроса, принадлежит или нет произвольное предложение из P_L теории T. В противном случае теория T называется *неразрешимой*. Теория T называется *наследственно неразрешимой*, если любая подтеория теории T той же сигнатуры Ω неразрешима. Для класса $\mathbf{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω символом $\mathbf{K}_{fin}$ обозначается класс конечных систем из $\mathbf{K}$. Теория $Th(\mathbf{K})$ называется *эффективно неотделимой*, если рекурсивно неотделимы множества $Th(\mathbf{K})$ и $P_L \backslash Th(\mathbf{K}_{fin})$, т. е. не существует таких непересекающихся рекурсивных множеств $\Phi, \Psi \subset P_L$, что $Th(\mathbf{K}) \subset \Phi$ и $P_L \setminus Th(\mathbf{K}_{fin}) \subset \Psi$.

Теорема 3. *Для любого класса* $\mathbf{K}$ *универсальных нетривиально упорядоченных полуавтоматов справедливы следующие утверждения:*

1) *если элементарная теория класса* $\mathbf{K}$ *наследственно неразрешима, то и элементарная теория класса полугрупп* $Inp\ \mathbf{K}$ *наследственно неразрешима [3];*

2) *если элементарная теория класса* $\mathbf{K}$ *эффективно неотделима, то и элементарная теория класса полугрупп* $Inp\ \mathbf{K}$ *эффективно неотделима [3].*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Акимова С.А.* О характеризации упорядоченных автоматов// Социально-экономическое развитие России: Проблемы, поиски, решения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд. центр Сарат. гос. соц.-экон. ун-та, 2005. Ч. 2. С. 105–106.

2. *Визинг В.Г.* Некоторые нерешенные задачи в теории графов// УМН. 1968. Т. 23, № 6. С. 117–134.

3. *Ершов Ю.Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980. 320 с.

УДК 519.4

Д.А. Бредихин

О МНОГООБРАЗИИ ДИСТРИБУТИВНЫХ РЕШЕТОК С ДОМИНО ОПЕРАЦИЯМИ

В статье находится базис тождеств многообразия дистрибутивных решеток, порожденного классом решеток бинарных отношений, оснащенных домино операцией над отношениями.

Общеизвестно, что теория булевых алгебр является алгебраической версией логики высказываний. Рассмотрение позитивной части логики высказываний (совокупности предложений, в записи которых используются только операции конъюнкции и дизъюнкции) сводится к изучению класса дистрибутивных решеток.

Попытки алгебраизации логики предикатов привели к необходимости рассмотрения наряду с булевыми операциями ряда специфических операций над отношениями. К таким операциям относятся операции умножения и обращения, операции цилиндрофикации и ряд других операций над отношениями, имеющих многочисленные приложения в различных областях математики и логики [1]. Рассмотрение множеств отношений относительно заданных на них операций приводит к концепции алгебры отношений. Основы алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А.Тарского [2]. Им были рассмотрены алгебры отношений вида $(\Phi, \circ, ^{-1}, \cup, \cap, ^{-}, \Delta, \varnothing, U)$, где $\circ$, $^{-1}$ – операции умножения и обращения отношений; $\cup, \cap, ^{-}$ – булевы операции объединения, пересечения и дополнения; $\Delta, \varnothing, U$ – тождественное, пустое и универсальное отношения соответственно. Другой подход к алгебраической трактовке классической логики предикатов был реализован с помощью цилиндрических алгебр [3]. Аппарат алгебр отношений нашел применение также в теории полугрупп [4] и модальной логике [5].

Обозначим через $Rel(X)$ множество всех бинарных отношений, заданных на базисном множестве X. Множество бинарных отношений $\Phi \subset Rel(X)$, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру $(\Phi,\ \Omega)$, называемую алгеброй отношений. Обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

Рассмотрим используемые в модальной логике [5, 6] домино операции S_1 и S_2 над бинарными отношениями. Для всякого бинарного отношения $\rho \in Rel(X)$ положим

$$S_1(\rho) = pr_2\rho \times X \text{ и } S_2(\rho) = X \times pr_1\rho,$$

где $pr_1\rho = \{x : (\exists y)(x, y) \in \rho\}$ и $pr_2\rho = \{y : (\exists x)(x, y) \in \rho\}$ – первая и вторая проекции отношения ρ соответственно.

Класс алгебр $R\{\cup,\cap,^{-},S_2\}$ был охарактеризован в [6], а класс $R\{\cup,\cap,^{-},S_1,S_2\}$ – в [5]. Нами будут рассмотрены классы $R\{\cup,\cap,S_1\}$ и $R\{\cup,\cap,S_2\}$. Исключение из числа операций булевой операции дополнения приводит к невозможности использования в доказательствах аппарата булевых алгебр и требует новых подходов. В связи с этим заметим, что операции рассматриваемых алгебр являются позитивными, то есть могут быть заданы с помощью формул исчисления предикатов первого порядка, содержащих в своей записи лишь конъюнкцию и дизъюнкцию, а также кванторы существования. Это позволяет применить к таким классам общую теорию многообразий и квазимногообразий алгебр отношений с позитивными операциями [7–9].

Основной результат работы формулируется в следующей теореме.

Теорема. *Многообразие* $Var\{\cup,\cap,S_1\}$ *и многообразие* $Var\{\cup,\cap,S_2\}$ *совпадают. Алгебра* $(A,\vee,\wedge,^*)$ *типа* $(2,2,1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\cup,\cap,S_1\}$ *тогда и только тогда, когда* $(A,\vee,\wedge,^*)$ *— дистрибутивная решетка и выполняется следующая система тождеств:*

$$(x \vee y)^* = x^* \vee y^*,$$

$$x \wedge (x^*)^* = x,$$

$$((x^* \wedge y^*)^*)^* = (x^* \wedge y^*)^*,$$

$$((x^*)^* \wedge y)^* = (x^*)^* \wedge y^*.$$

В заключение приведем ряд проблем, инициируемых сформулируемым результатом.

Проблема 1. Являются ли классы $R\{\cup,\cap,S_1\}$ и $R\{\cup,\cap,S_2\}$ многообразиями (квазимногообразиями)?

Проблема 2. Охарактеризовать многообразие $Var\{\cup,\cap,S_1,S_2\}$. Является ли это многообразие конечно базируемым?

Проблема 3. Является ли класс $Var\{\cup,\cap,S_1,S_2\}$ многообразием (квазимногообразием)?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3–197.
2. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 6. P. 73–89.
3. *Henkin L., Monk J.D., Tarski A.* Cylindric Algebras. Part I. North-Holland, Amsterdam, 1971.
4. *Schein B.M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. Vol. 1. P. 1–62.
5. *Venema Y.* Many-Dimensional Logic. Universitiet van Amsterdam, 1989.
6. *Kuhn S.* The domino relation: flattening a two-dimensional logic // J. of Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 173–195.
7. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. Матемематика. 1993. № 3. С. 23–30.
8. *Бредихин Д.А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
9. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.